UNTERSUCHUNGEN ZUR ASYMPTOTIK DER MITTLEREN SCHRITTZAHL VON SIMPLEXVERFAHREN IN DER LINEAREN OPTIMIERUNG

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DES GRADES EINES

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

DES FACHBEREICHES MATHEMATIK

DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

VON

KARL-HEINZ BORGWARDT

AUS LANDSTUHL

KAISERSLAUTERN 1977

BA

UNTERSUCHUNGEN ZUR ASYMPTOTIK DER MITTLEREN SCHRITTZAHL VON SIMPLEXVERFAHREN IN DER LINEAREN OPTIMIERUNG

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DES GRADES EINES

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

DES FACHBEREICHES MATHEMATIK

DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

VON

KARL-HEINZ BORGWARDT

AUS LANDSTUHL

KAISERSLAUTERN 1977

1784.329
BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
——AMSTERDAM——

Dissertation eingereicht am 1.3.1977

Mündliche Prüfung am 5.7.1977

Dekan: Prof. Dr. Eberhard Schock

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Brakhage

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Horst Becker

(überarbeitete Fassung)

VORWORT

An dieser Stelle gilt mein aufrichtiger Dank Herrn Professor Dr. Helmut Brakhage für die Überlassung dieses interessanten Themas.
Er hat durch zahlreiche wertvolle Anregungen und Hinweise - auch bezüglich der Darstellung - diese Arbeit gefördert.

Weiter bedanke ich mich bei Herrn Dr. rer. nat. Rüdiger Brombeer für Diskussionen über die Arbeit und den Herren Horst Dauenhauer und Manfred Sämann für ihre Mithilfe bei der Gewinnung der numerischen Resultate.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I Einleitung

§ 1 Bezeichnungen und Formulierung der allgemeinen Fragestellung 2

§ 2 Beschreibung eines theoretischen Simplexalgorithmus 9

§ 3 Ein stochastisches Modell Formulierung der Hauptresultate 14

Kapitel II Integraldarstellung für den Erwartungswert der Schrittzahlschranke

§ 1 Duale Beschreibung des theoretischen Simplexalgorithmus 21

§ 2 Eine Integraldarstellung für die Wahrscheinlichkeit w_R 28

§ 3 Eine Integraldarstellung für $E_{\partial\Omega}(S)$ 35

§ 4 Abschätzungen für $E_{\partial\Omega}(S)$ 42

§ 5 Verallgemeinerung der Resultate 49

Kapitel III Das asymptotische Verhalten der mittleren Schrittzahlschranke für spezielle Verteilungen

§ 1 Die Gaußverteilung 54

§ 2 Gleichverteilung auf Ω_n und ω_n 62

Kapitel IV Vergleich der Theorie mit numerischen Experimenten

§ 1 Numerische Realisierung des theoretischen Simplexalgorithmus 76

§ 2 Der Erwartungswert der Schrittzahlschranke im Falle n=3 85

§ 3 Numerische Experimente für allgemeine n 90

Kapitel V Anhang

§ 1 Berechnung der Funktionaldeterminante 94

§ 2 Einige Abschätzungen 98

Literaturverzeichnis 103

KAPITEL I

Einleitung

§1 Bezeichnungen und Formulierung der allgemeinen Fragestellung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Rechenaufwand von Simplexverfahren für die lineare Optimierung. Wegen der großen Bedeutung dieser Verfahren für die Anwendungen ist diese Fragestellung nicht nur von theoretischem, sondern auch von erheblichem praktischen Interesse. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, sei etwa eine Optimierungsaufgabe vom Typ

$$\text{(1.1a)} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Max} \\ x \in X \end{array} \quad v^T x \qquad X := \{x \mid Ax \leq b\}$$

zugrunde gelegt. Dabei seien A eine reelle $(m \times n)$-Matrix $(m \geq n)$ $v, x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es ist wohlbekannt, wie man Aufgaben von anderem Typ äquivalent in die Form (1.1a) überführen kann. Zur weiteren Vereinfachung sei angenommen, daß die Menge X der zulässigen Punkte nichtleer sei und sogar innere Punkte besitze. Ist etwa x_o ein innerer Punkt von X (gilt also $Ax_o < b$), so kann man, indem man $x - x_o$ als neuen Variablenvektor einführt und die einzelnen Ungleichungen des neuen Systems durch die jeweils positiven Glieder der rechten Seite dividiert, (1.1a) auf die Form

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{Max} \\ x \in X \end{array} \quad v^T x \qquad \begin{array}{l} X := \{x \mid Ax \leq e\} \\ \text{mit } e = (1, \ldots, 1)^T \end{array}$$

bringen. Die "Optimierungsfunktion" $v^T x$ soll im folgenden mit Q(x) bezeichnet werden.

Die Optimierungsaufgabe (1.1) soll den Untersuchungen dieser Arbeit zugrunde liegen. Da wir nach dem numerischen Aufwand von Rechenverfahren im Mittel fragen, können "Entartungsfälle" vernachlässigt werden, weil sie die untersuchten Erwartungswerte nicht beeinflussen.

Unsere Matrix A bestehe aus den Zeilenvektoren $a_1^T,..,a_m^T$, der Vektor v gibt die "Optimierungsrichtung" der Optimierungsfunktion $Q(x) = v^T x$ an. Wir wollen annehmen, daß (1.1) in dem Sinne "nichtentartet" ist, daß von den m+1 Vektoren $a_1,..,a_m,v$ je n linear unabhängig sind. Diese Voraussetzung vereinfacht die spätere Diskussion erheblich. Sie garantiert zunächst, daß für jede Teilmenge

(1.2) $\Delta = \{\Delta_1,..,\Delta_n\} \subset \{1,..,m\}$ mit $\Delta_1<\Delta_2<..<\Delta_n$

das Gleichungssystem

(1.3) $$a_{\Delta_1}^T x = 1 \ , \ \dots \ , \ a_{\Delta_n}^T x = 1$$

genau eine Lösung x_Δ besitzt. Unter den $\binom{m}{n}$ Punkten x_Δ stellen die zulässigen Punkte ($x_\Delta \in X$) die Ecken des (möglicherweise unbeschränkten) Polyeders X dar.

Weiter sichert diese Voraussetzung, daß - falls Q(x) auf X nach oben beschränkt ist - (1.1) eine Ecke x_{opt} ($= x_{\Delta_{opt}}$) als eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Die Menge der Δ im Sinne von (1.2) wird mit $\mathfrak{S}$ und die Menge der $\Delta \in \mathfrak{S}$, für die x_Δ Eckpunkt von X ist, mit $\mathfrak{S}_R$ bezeichnet.

(1.4) $$\mathfrak{S}_R := \{\Delta \in \mathfrak{S} \mid x_\Delta \in X\}$$

Im Einklang mit der üblichen Terminologie wird man unter einem Simplexverfahren für (1.1) ein Verfahren verstehen, das in zwei Phasen abläuft.

(1.5.1) Die Bestimmung einer Startecke x_{Δ^o} ($\Delta^o \in \mathcal{S}_R$)

(1.5.2) Ausgehend von der Startecke x_{Δ^o} wird nach einer festgelegten Vorschrift sukzessiv eine Folge $x_{\Delta^o}, \ldots, x_{\Delta^s}$ von Eckpunkten bestimmt, für die $Q(x_{\Delta^o}) < \ldots\ldots < Q(x_{\Delta^s})$, derart, daß jeweils aufeinanderfolgende Eckpunkte "benachbart" sind. Das Verfahren bricht mit der Ecke x_{Δ^s} ab und liefert eine Entscheidung, ob x_{Δ^s} Optimalecke ist, oder ob $Q(x)$ auf X unbeschränkt nach oben ist.

(Hierbei heißen x_Δ und $x_{\Delta'}$ benachbart, falls sich die beiden Mengen Δ und Δ' durch genau ein Element unterscheiden. Dann nennen wir auch Δ und Δ' benachbart).

Der aus der Bestimmung der Folge

$$(1.6) \qquad x_{\Delta^o}, \ldots, x_{\Delta^s} \qquad \text{mit} \quad Q(x_{\Delta^o}) < \ldots\ldots < Q(x_{\Delta^s})$$

bestehende zweite Teil des Verfahrens heißt Simplex-algorithmus, und s heißt die Schrittzahl des Simplex-algorithmus für das Problem (1.1).

Der Rechenaufwand des Simplexverfahrens wird im wesentlichen durch die Schrittzahl s bestimmt. Die Problemstellung dieser Arbeit kann jetzt in einem vorläufigen Sinne so formuliert werden:

Man untersuche, welche Rückschlüsse man aus Informationen über die Eingabedaten von (1.1) (dies sind die Parameter m,n, die Koeffizienten von A und des Vektors v) auf die Schrittzahl s ziehen kann.

Eine erste grobe Abschätzung geht davon aus, daß s durch die Anzahl der Ecken von X abgeschätzt werden kann. Insbesondere gilt also

$$(1.7) \qquad s \leq \binom{m}{n}$$

wegen $\#(\mathcal{S}) = \binom{m}{n}$. Die Frage, wieviele Ecken die Lösungsmenge X eines Systems $Ax \leq b$ in m linearen Ungleichungen für n reelle Variable maximal besitzen kann, hat sich als eine sehr reizvolle und schwierige mathematische Aufgabe erwiesen. So ist bisher bekannt, daß die maximal mögliche Eckenzahl abgeschätzt werden kann durch

$$\binom{m - \left[\frac{n+1}{2}\right]}{m-n} + \binom{m - \left[\frac{n+2}{2}\right]}{m-n}$$

falls $m \leq n+3$ oder falls $m \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ (Klee [22]).

Von Entartungsfällen abgesehen, stimmt die Eckenzahl von X überein mit der Anzahl der (n-1)-dimensionalen Randsimplexe der von den m Zeilenvektoren von A aufgespannten konvexen Hülle Y. (vgl. hierzu z.B. II §1). Unter gewissen stochastischen Annahmen über die Verteilung dieser Zeilenvektoren (vgl. hierzu auch §3 dieser Einleitung) wurden in den Arbeiten (Carnal [4] , Efron [9] , Geffroy [13] , Raynaud [32] , [33] , Renyi-Sulanke [35] , [36] , [37] , Ziezold [48]) die Erwartungswerte der Anzahl von auftretenden Randsimplexen untersucht und asymptotische Resultate für diese Erwartungswerte hergeleitet.

Erwartungsgemäß ergeben alle Schrittzahlabschätzungen, die auf Abschätzungen oder Erwartungswerten der Eckenzahl bzw. der Randsimplexzahl beruhen, viel zu grobe Schranken für die Schrittzahl von Simplexalgorithmen.

Eine Reihe von Arbeiten befaßt sich daher mit dem "Durchmesser" d(X) eines Polyeders X:
unter d(X) versteht man den größten "Abstand" zwischen Eckpunkten von X, wobei der "Abstand" zweier Eckpunkte die minimale Kantenzahl der die Eckpunkte verbindenden Kantenzüge ist. d(m,n) sei der maximale Durchmesser aller Polyeder X bei gegebenen Parametern m,n.
d(m,n) ergibt eine untere Schranke für die Schrittzahl s im "ungünstigsten Fall" bei gegebenen m,n.

Über d(m,n) sind die folgenden Resultate bekannt:

$d(m,n) \leqq m - n$ für $n \leqq 5$, falls X beschränkt ist (Klee [23])

$d(m,n) \geqq m - n + \min\left(\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, \left\lceil\frac{m-n}{4}\right\rceil\right)$ (Klee [23]).

Damit wurde die von Dantzig [7] und Hirsch geäußerte Vermutung, daß allgemein

$d(m,n) \leqq m - n$, von Klee widerlegt.

Es stellt sich die Frage, wie groß die Schrittzahl ungünstigstenfalls werden kann, wenn man sich auf eine Vorschrift nach (1.5.2) festlegt und nur diese zur Bestimmung der Nachfolgerecke anwendet. Drei der gebräuchlichsten Varianten des Simplexalgorithmus wurden daraufhin in Arbeiten von Klee und Minty [17] bzw. von Jeroslow [16] untersucht. Für die Größen $d_1(m,n)$, $d_2(m,n)$, $d_3(m,n)$ (sie stehen für die maximal mögliche Schrittzahl bei (m,n)-Problemen bei Anwendung folgender Varianten

1. einfache Pivotsuche
2. Methode des steilsten Anstiegs
3. optimale Pivotsuche)

werden folgende Abschätzungen angegeben:

$$\alpha_n m^{\left[\frac{n}{2}\right]} \leqq d_i(m,n) \leqq \beta_n m^{\left[\frac{n}{2}\right]} \qquad \text{für } i=1,2 \text{ [17] und } i=3 \text{ [16]}$$

mit positiven, von m unabhängigen α_n, β_n.

Alle auf diesen Ergebnissen beruhenden Voraussagen für die

Schrittzahl s übertreffen die in der Praxis "im Mittel" auftretende Schrittzahl so weit, daß sie nur von sehr bedingtem Wert für die Analyse des Rechenaufwandes sind. Man kann sagen, daß die Bedeutung des Simplexverfahrens für die Praxis zu einem erheblichen Teil darauf beruht, daß es selbst für relativ große Werte der Parameter m und n im Durchschnitt eine überraschend geringe Schrittzahl benötigt. Die uns bisher bekannten theoretischen Untersuchungen sind nicht in der Lage, dieses bemerkenswerte Phänomen zu erklären (siehe Klee [18] S.313; Liebling [27] S.16). Einen ersten Schritt zum Verständnis dieses Phänomens soll die vorliegende Arbeit ermöglichen.

§2 Beschreibung eines theoretischen Simplexalgorithmus

Für die theoretischen Untersuchungen erweist es sich als zweckmäßig, die auf dem ersten Schritt 1.5.1 des Simplexverfahrens beruhende Festlegung der Startecke x_{Δ^o} so zu simulieren, daß eine gewisse Symmetrie zur Rolle der gesuchten Optimalecke x_{opt} vorliegt. Zu diesem Zweck denken wir uns zusätzlich zu den Eingabedaten für das Problem (1.1) einen weiteren Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die entstehende $(m+2)\times n$-Matrix

$$(2.1) \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix}$$

repräsentiert dann die Gesamtheit der Eingabedaten.

Wir erweitern unsere Voraussetzung über die Nichtentartung des Problems (1.1), indem wir voraussetzen

(2.2) Je n Zeilenvektoren der Matrix $\hat{A}$ sind linear unabhängig.

Die "Optimalecke" x_{opt} von (1.1) ist dann, falls sie existiert, eindeutig dadurch charakterisiert, daß gilt

(2.3) In der Ecke x_{opt} von X existiert eine Stützhyperebene von X mit v als Außen-Normalenvektor.[1]

Analog soll der zur Matrix $\hat{A}$ in unserem idealisierten Modell gehörige Startvektor x_{Δ^o} durch folgende Bedingung charakterisiert werden.

[1] Unter einem Außen-Normalenvektor einer Stützhyperebene von X sei ein Normalenvektor zu verstehen, der in den X nicht enthaltenden Halbraum weist.

(2.4) In der Startecke x_{Δ^o} von X existiert eine Stützhyperebene von X mit u als Außen-Normalenvektor.

Existiert eine Ecke von X, die (2.4) genügt, so ist sie eindeutig bestimmt. Existiert keine solche Ecke, so soll in diesem Fall dem Simplexalgorithmus die "leere Eckenfolge" (1.6) und die Schrittzahl s=0 zugeordnet werden.

Es soll jetzt eine Variante der üblichen Simplexalgorithmen beschrieben werden, die sich für die theoretischen Untersuchungen als besonders geeignet erwiesen hat. Ihre numerische Realisierung ist durch eine relativ einfache Modifikation der üblichen Tableaumethode zu erreichen, wie in Kapitel IV beschrieben wird.

Es sei U=span(u,v) der von u und v aufgespannte zweidimensionale Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $U^+ := \{\lambda u+\mu v;\ \lambda \geq 0,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ die von span(v) begrenzte abgeschlossene Halbebene, in der u liegt. $\tilde{X} \subset U$ sei dasjenige Polyeder, das man durch orthogonale Projektion von X auf U erhält. Faßt man $\tilde{X}$ als "Schatten von X" bezüglich dieser Projektion auf, so ist es naheliegend, eine Ecke x_Δ ($\Delta \in \mathfrak{I}_R$) als "auf der Schattengrenze von X liegend" oder kurz als "Schattenecke" zu bezeichnen, falls die Projektion $\tilde{x}_\Delta$ von x_Δ eine Ecke von $\tilde{X}$ ist. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn in x_Δ eine Stützhyperebene existiert, deren Außen-Normalen-

vektor in U liegt. Eine solche Schattenecke soll zulässige Schattenecke heißen, wenn gilt

(2.5) In x_Δ existiert eine Stützhyperebene von X mit einem Außen-Normalenvektor aus U^+.

Wir definieren jetzt

(2.6) $\mathfrak{S}_S = \{\Delta \in \mathfrak{S}_R \mid x_\Delta \text{ genügt (2.5)}\}$

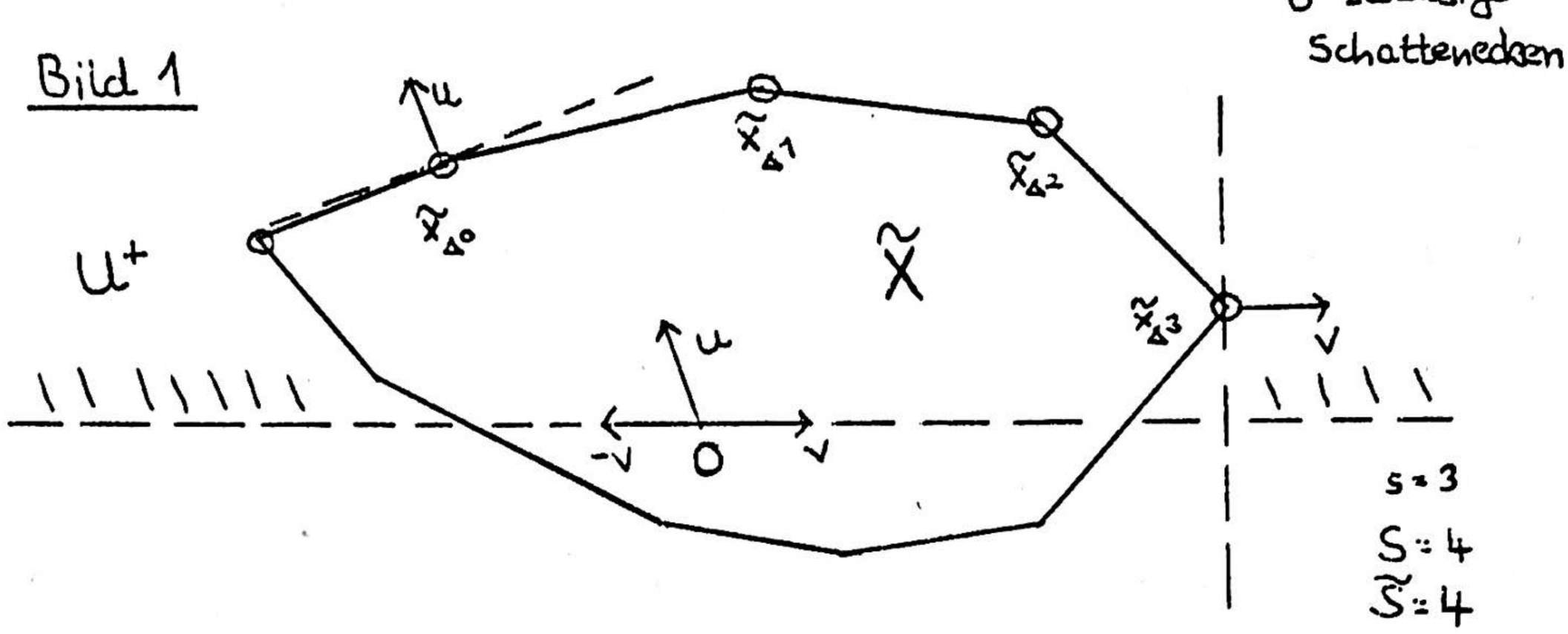
Wegen $u,v \in U^+$ sind insbesondere die Ecken x_{Δ_o} und x_{opt} zulässige Schattenecken. Ist x_Δ eine zulässige Schattenecke und existieren Nachbarecken $x_{\Delta'}$, mit $Q(x_\Delta) < Q(x_{\Delta'})$, so gibt es unter diesen Nachbarecken (unter Beachtung der Nichtentartungsvoraussetzung (2.2)) höchstens eine zulässige Schattenecke und genau eine zulässige Schattenecke, wenn Q auf X nach oben beschränkt ist. Ein Beweis hierfür, der auf der Tableaumethode beruht, ist in Kapitel IV §1 Lemma 1 angegeben.

Aufgrund der vorausgeschickten Vorbetrachtungen kann der unseren theoretischen Untersuchungen zugrundeliegende Simplexalgorithmus folgendermaßen beschrieben werden:

(2.7) Ausgehend von x_{Δ_o} bilde man die eindeutig bestimmte Folge $x_{\Delta_o}, x_{\Delta_1}, \ldots, x_{\Delta_s}$ sukzessiv benachbarter "zulässiger Schattenecken" (dh. $\Delta_i \in \mathfrak{S}_S$) mit $Q(x_{\Delta_o}) < \ldots < Q(x_{\Delta_s})$, die mit x_{Δ_s} abbricht.

In Bild 1 wird die einfache geometrische Bedeutung der eingeführten Begriffe an einem Bild eines "Schattenpolyeders" $\hat{X} \subset U$ veranschaulicht.

Bild 1



$\hat{S}$ + 1 sei die Gesamtzahl der zulässigen Schattenecken.

$\hat{S}$ ist also im Falle $\#(\vartheta_S) \neq 0$ die maximale Schrittzahl, die bei geeigneter Wahl einer zulässigen Schattenecke als Startecke auftreten kann, falls man den Vektor u in $\hat{A}$ so variiert, daß U^+ nicht verändert wird. ϑ_S bleibt dabei offenbar unverändert.

Um die Auswirkung der Sonderfälle in der Theorie zu berücksichtigen, falls Q(x) auf X nach oben bzw. unten unbeschränkt ist, ist es zweckmäßig, die beiden folgenden Hilfsgrößen einzuführen.

(2.8)
$$\delta_1 := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } Q(x) \text{ auf } X \text{ nach oben unbeschr.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta_2 := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } Q(x) \text{ auf } X \text{ nach unten unbeschr.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Größe

(2.9) $$S := \tilde{S} + \delta_1 + \delta_2 \quad , \quad \hat{S} := \#(\vartheta_S) - 1$$

stimmt also, falls Q(x) auf X beschränkt ist, mit der Größe $\hat{S}$ überein und unterscheidet sich im allgemeinen Fall höchstens um den Summanden 1 von $\hat{S}$. Da $\hat{S}=-1$ nur auftreten kann, wenn Q(x) nach oben und unten unbeschränkt ist, gilt stets $S \geq 0$.

In jedem Fall ist S eine obere Schranke für die Schrittzahl s des Simplexalgorithmus. Da sie sich aus beweistechnischen Gründen für die theoretischen Untersuchungen als besonders geeignet erweist, wird sie allen Abschätzungen der Schrittzahl s zugrunde gelegt. Wir wollen sie im folgenden als "Schrittzahlschranke" bezeichnen.

Umfangreiche numerische Experimente stützen die Hypothese, daß sich die auf den durch (2.7) charakterisierten Simplexalgorithmus beziehenden theoretischen Resultate dieser Arbeit weitgehend auf die in der Praxis auftretenden Simplexalgorithmen übertragen lassen.
Die Frage, inwieweit sich die Methoden dieser Arbeit auch zur theoretischen Herleitung analoger Resultate für andere Simplexalgorithmen eignen, soll späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

§3 Ein stochastisches Modell

Formulierung der Hauptresultate

Um von einer "mittleren Schrittzahl" eines Simplexalgorithmus in einem präzisen Sinne sprechen zu können, muß man sich die Eingabedaten des Problems als Zufallsvariablen eines Wahrscheinlichkeitsraumes gegeben denken.

Zu diesem Zweck fassen wir für feste natürliche Zahlen m,n mit $m \geq n$ die Gesamtheit $\mathcal{M}(m,n)$ der Matrizen

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix} \quad \text{mit } a_i, u, v \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

als Stichprobenraum $\mathcal{U}(m,n)$ auf und identifizieren die $\hat{A}$ (in naheliegender Weise) mit den Punkten des $\mathbb{R}^M$, wobei $M = (m+2)n$. Man erhält einen Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{W}$, wenn eine Wahrscheinlichkeit P auf der σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen des $\mathbb{R}^M$ gegeben wird. Die Schrittzahl $s = s(\hat{A})$ und die Schrittzahlschranke $S = S(\hat{A})$ werden dann zu Zufallsvariablen auf $\mathfrak{W}$, falls man noch - der Einfachheit halber - $S(\hat{A}) = s(\hat{A}) = 0$ setzt, falls $\hat{A}$ entartet ist.

(Andere auf einer Erweiterung des Algorithmus auf gewisse Entartungsfälle beruhende Festsetzungen von $s(\hat{A})$ bzw. $S(\hat{A})$ beeinflussen die späteren Resultate nicht, solange man für diese Erweiterung z.B. die naheliegende Forderung $s(\hat{A}) \leq S(\hat{A}) \leq \binom{m}{n}$ stellt und voraussetzt,

daß die Menge der entarteten $\hat{A}$ eine Nullmenge bildet. Diese Voraussetzung ist bei allen in dieser Arbeit behandelten Fällen erfüllt). Eine relativ einfache Überlegung zeigt, daß s und S Lebesgue-meßbar sind, so daß wegen $s(\hat{A}) \leq \binom{m}{n}$, $S(\hat{A}) \leq \binom{m}{n}$ ihre Erwartungswerte $E_{\mathfrak{N}\mathfrak{O}}(s)$ und $E_{\mathfrak{N}\mathfrak{O}}(S)$ existieren.

Wir bezeichnen diese Erwartungswerte als die "mittlere Schrittzahl (bzgl. $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$)" bzw. als die "mittlere Schrittzahlschranke (bzgl. $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$)".
Es interessiert vor allem das Verhalten dieser Größen in Abhängigkeit von den Parametern m und n. Zu diesem Zweck sei eine Schar von Wahrscheinlichkeitsräumen $\mathfrak{N}\mathfrak{O}(m,n)$ $(m,n \in \mathbb{N}, m \geq n)$ gegeben; schreibt man $S_{m,n}$ für die Schrittzahlschranke auf $\mathfrak{N}\mathfrak{O}(m,n)$, so konzentriert sich die Untersuchung auf das asymptotische Verhalten von $E_{\mathfrak{N}\mathfrak{O}(m,n)}(S_{m,n})$ für den Fall, daß m groß ist gegenüber n.

In Kapitel II wird zunächst für festes m,n eine Integraldarstellung für $E_{\mathfrak{N}\mathfrak{O}}(S)$ hergeleitet unter folgender Voraussetzung an die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

(3.2) Die Vektoren $a_1,\ldots,a_m,u,v$ sind kollektiv unabhängig und besitzen die gleiche rotationssymmetrische Verteilung auf $\mathbb{R}^n$.

Wählt man für gegebene Werte m und n als Verteilungen auf $\mathbb{R}^n$ in (3.2) speziell eine Gaußverteilung mit der Dichtefunktion

$$(3.3) \qquad f(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-(x^1)^2-\ldots.-(x^n)^2}$$

bzw. die Gleichverteilung auf der Vollkugel

$$(3.4) \qquad \Omega_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; ||x|| \leq 1\}$$

bzw. die Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche

$$(3.5) \qquad \omega_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \; ||x|| = 1\} \; ,$$

so erhält man nach (3.2) Scharen von Wahrscheinlichkeitsräumen

(3.6.1) $\mathfrak{M}_1(m,n)$: Gaußverteilung auf $\mathbb{R}^n$ nach (3.3)

(3.6.2) $\mathfrak{M}_2(m,n)$: Gleichverteilung auf Ω_n

(3.6.3) $\mathfrak{M}_3(m,n)$: Gleichverteilung auf ω_n .

Das Hauptresultat der Arbeit bezieht sich auf die Erwartungswerte

$$E_i(S_{m,n}) := E_{\mathfrak{M}_i(m,n)}(S_{m,n}). \qquad i=1,2,3$$

Satz 1

Für $m \to \infty$ gilt

(3.7.1) $E_1(S_{m,n}) = O(\sqrt{\ln m})$ (Gaußverteilung)

(3.7.2) $E_2(S_{m,n}) = O(m^{\frac{1}{n+1}})$ (Gleichverteilung auf Ω_n)

(3.7.3) $E_3(S_{m,n}) = O(m^{\frac{1}{n-1}})$ (Gleichverteilung auf ω_n) .

Der Beweis dieses Satzes erfolgt in Kapitel III der Arbeit und beruht auf der asymptotischen Auswertung der in Kapitel II hergeleiteten Integraldarstellung. Diese Herleitung liefert nicht nur die asymptotischen Resultate des Satzes, sondern ergibt auch explizite Abschätzungen der Form

(3.8) $$E_i(S_{m,n}) \leq \bar{C}_i(n) q_i(m,n)(1+\bar{\varepsilon}_i(m,n)) \quad \text{mit}$$

$$q_1(m,n) := \sqrt{\ln m} \qquad \bar{C}_1(n) := \sqrt{\pi}\, n^{\frac{3}{2}}$$

$$q_2(m,n) := m^{\frac{1}{n+1}} \qquad \bar{C}_2(n) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, n^2$$

$$q_3(m,n) := m^{\frac{1}{n-1}} \qquad \bar{C}_3(n) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, n^2$$

und explizit gegebenen Funktionen

$$\bar{\varepsilon}_i(m,n), \text{ wobei } \lim_{m\to\infty} \bar{\varepsilon}_i(m,n) = 0.$$

In den Fällen i=2,3 von Satz 1 können auch untere Schranken der Art

(3.9) $$E_i(S_{m,n}) \geq \underline{C}_i(n) q_i(m,n)(1-\underline{\varepsilon}_i(m,n))$$

$$\text{mit } \underline{C}_i(n) > 0, \quad \lim_{m\to\infty} \underline{\varepsilon}_i(m,n) = 0 \qquad i=2,3$$

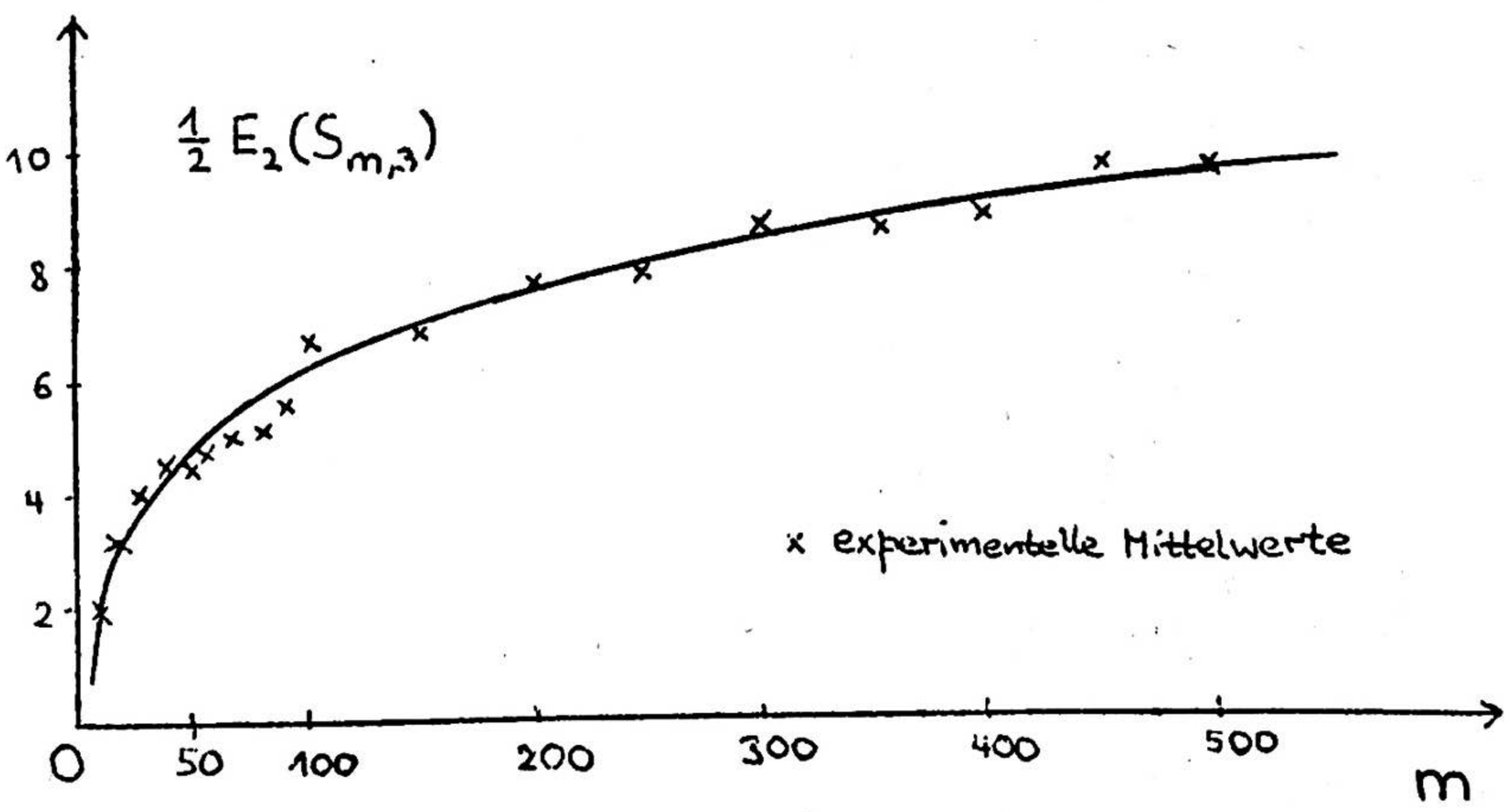
hergeleitet werden, die zeigen, daß in Satz 1 jedenfalls in den Fällen i=2,3 die Aussagen

$$E_i(S_{m,n}) = O(q_i(m,n)) \quad (m\to\infty)$$

nicht verbessert werden können. Die Vermutung, daß dies auch im Fall i=1 zutrifft, konnte bisher leider nicht bewiesen werden.

Im Falle $n = 3$ können die Integraldarstellungen $E_i(S_{m,3})$ explizit berechnet werden, so daß ein unmittelbarer Vergleich der Theorie mit numerischen Experimenten möglich ist. In Bild 2 ist für den Fall der Gleichverteilung auf der Kugel der theoretische Wert $\frac{1}{2}E_2(S_{m,3})$ als Kurve über m aufgetragen, wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ den Unterschied zwischen der mittleren Schrittzahlschranke und der mittleren Schrittzahl berücksichtigt. Die angegebenen experimentellen Werte (×) sind jeweils für feste m Mittelungen aus 20 Experimenten. Das Bild bestätigt sehr überzeugend die Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Experimenten. In Kapitel IV wird dieser Vergleich zwischen Theorie und Experimenten ausführlicher behandelt.

Bild 2



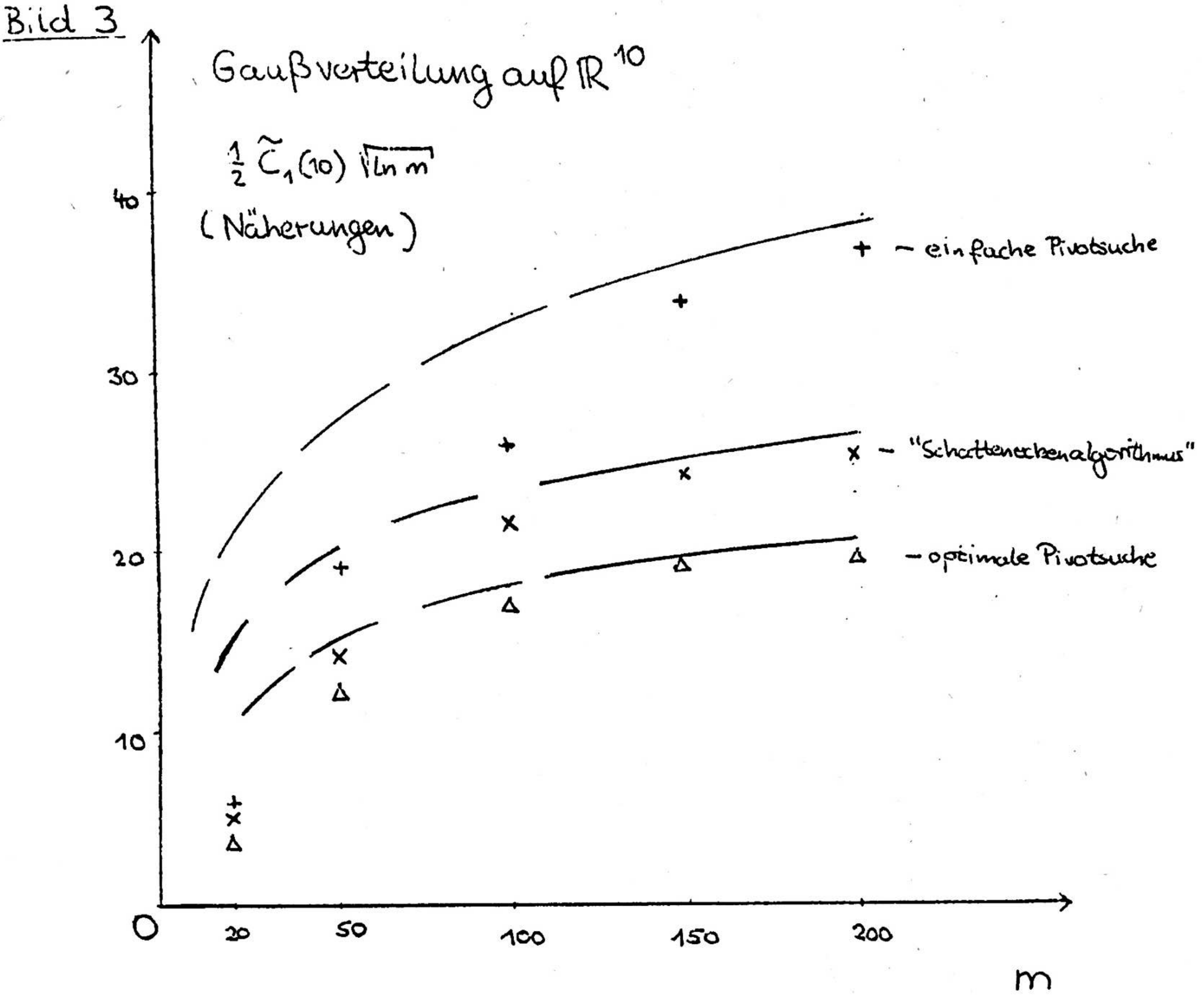
Für $n > 3$ ist die numerische Auswertung der Integraldarstellung für $E_{\eta 0}(S)$ vom Aufwand her nicht mehr durchführbar. Es liegt aufgrund der Resultate (3.7),(3.8) nahe, für feste n die Erwartungswerte $E_i(S_{m,n})$ für $m \to \infty$ in der Form

$$E_i(S_{m,n}) \approx \tilde{C}_i(n)\, q_i(m,n) \tag{3.10}$$

mit geeignet gewählten $\tilde{C}_i(n)$ zu approximieren, wobei man geeignete $\tilde{C}_i(n)$ etwa aus den Experimenten entnimmt. Bild 3 zeigt für $n = 10$ im Falle der Gaußverteilung den Vergleich einer solchen "halbtheoretischen" asymptotischen Näherungsformel mit den Experimenten (x). Man erkennt, daß das Verhalten von $\frac{1}{2}\,\tilde{C}_i(n)q_i(m,n)$ das Wachstumsverhalten der mittleren Schrittzahl aus den Experimenten asymptotisch gut wiedergibt. Gleichzeitig wird in Bild 3 ein Vergleich der Schrittzahl des "Simplexverfahrens mit einfacher Pivotsuche" (+) und des 'Simplexverfahrens mit optimaler Pivotsuche" (△) dargestellt. Man erkennt, daß man durch Abänderung der Konstante $\tilde{C}(n)$ auch dieses Wachstumsverhalten gut wiedergeben kann.

Eine Analyse der in Kapitel III explizit angegebenen Funktion $\bar{\varepsilon}_i(m,n)$ zeigt, daß es aufgrund der bisherigen Theorie leider noch nicht möglich ist, für die mittlere Schrittzahlschranke eine für alle m,n "polynomiale Schrankenfunktion" zu finden. Die Klärung dieser noch offenen Frage muß späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Bild 3



Es war ein wesentliches Ziel dieser Arbeit, die starke Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens der mittleren Schrittzahl von den zugrunde gelegten Verteilungen der Eingabedaten zu zeigen. Es ist beabsichtigt, diese Abhängigkeit systematisch weiter zu untersuchen. Zum Beispiel sollten die von Liebling [27] in seinen Experimenten über die mittlere Schrittzahl zugrunde gelegten Annahmen über die Verteilung in die theoretischen Untersuchungen mit einbezogen werden.

KAPITEL II

Integraldarstellung für den Erwartungswert der Schrittzahlschranke

§1 Duale Beschreibung des theoretischen Simplexalgorithmus

In Kapitel I wurde der theoretische Simplexalgorithmus für die Optimierungsaufgabe

$$(1.1) \qquad \underset{x \in X}{Max}\ v^T x \qquad\qquad X := \{x \mid Ax \leq e\}$$

in der "primalen" Beschreibung charakterisiert, dh. durch die Definition der Eckenfolge $x_{\Delta^0}, \ldots, x_{\Delta^s}$, die hierbei durchlaufen wird. Diese Art der Beschreibung wurde vorgezogen, weil sie der üblichen geometrischen Interpretation der "primalen" Simplexalgorithmen in der Literatur entspricht.

Für die weitere theoretische Behandlung ist aber der Übergang zu einer äquivalenten dualen Beschreibung dieses Algorithmus zweckmäßig. In dieser dualen Beschreibung tritt an die Stelle des (möglicherweise unbeschränkten) Polyeders X nach (1.1) das (beschränkte) Polyeder Y, das man im $\mathbb{R}^n$ als konvexe Hülle der Vektoren $0, a_1, \ldots, a_m$ erhält, symbolisch

$$(1.2) \qquad Y := KH(0, a_1, \ldots, a_m).$$

Weiter sei $\hat{Y}$ der von $a_1, \ldots, a_m$ erzeugte konvexe Kegel (mit Scheitel 0), symbolisch

(1.3) $\hat{Y} := KK(a_1,\ldots,a_m)$

Wie im Kapitel I setzen wir voraus, daß die Matrix

(1.4) $$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix}$$

im folgenden Sinne nichtentartet ist:

(1.5) Je n Zeilenvektoren von $\hat{A}$ sind linear unabhängig.

Aus (1.5) folgt, daß für jedes $\Delta \in \vartheta$, dh. für jede Teilmenge $\Delta = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$ mit $1 \leq \Delta_1 < \ldots < \Delta_n \leq m$ der Menge $\{1,\ldots,m\}$, die von $a_{\Delta_1},\ldots,a_{\Delta_n}$ aufgespannte konvexe Hülle ein (n-1)-dimensionales Simplex ist, das mit $\Sigma(\Delta)$ bezeichnet werde:

(1.6) $\Sigma(\Delta) := KH(a_{\Delta_1},\ldots,a_{\Delta_n})$.

Ist x_Δ eine Ecke von X, so folgt aus den Bestimmungsgleichungen

$a_{\Delta_1}^T x = 1, \ldots, a_{\Delta_n}^T x = 1$ für x_Δ (vgl. (I.1.3)),

daß die durch

(1.7) $y^T x_\Delta = 1$

definierte Hyperebene die Vektoren $a_{\Delta_1},\ldots,a_{\Delta_n}$ enthält, daß also mit (1.7) gerade die durch $\Sigma(\Delta)$ aufgespannte Hyperebene definiert wird.

x_Δ ist genau dann zulässiger Punkt von X, sogar Ecke von X, wenn alle m Vektoren $a_1,\ldots,a_m$ in dem durch

$$(1.8) \qquad y^T x_\Delta \leq 1$$

definierten Halbraum liegen, oder, was damit äquivalent ist, falls die durch $\Sigma(\Delta)$ aufgespannte Hyperebene (1.7) eine Stützhyperebene für Y ist. $\Sigma(\Delta)$ nennt man in diesem Fall Randsimplex von Y. Die in (I.1.4) definierte Menge ϑ_R kann also auch folgendermaßen charakterisiert werden:

$$(1.9) \qquad \mathcal{\vartheta}_R = \{ \Delta \in \mathcal{\vartheta} \mid \Sigma(\Delta) \text{ ist Randsimplex von Y} \}$$

Für die weitere Übertragung der primalen Begriffe von Kapitel I machen wir von dem folgenden Lemma Gebrauch:

Lemma 1

Ist x_Δ Ecke von X, so ist der Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, genau dann Außennormale einer Stützhyperebene in x_Δ an X, wenn

$$(1.10) \qquad \mathbb{R}^+ w \cap \Sigma(\Delta) \neq \emptyset .$$

In (1.10) ist $\mathbb{R}^+ w := \{ \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \}$ der von w aufgespannte Halbstrahl, und (1.10) ist gleichbedeutend damit, daß w in dem von $\Sigma(\Delta)$ aufgespannten konvexen Kegel (mit dem Scheitel 0) liegt.

Vor dem Beweis von Lemma 1 sollen einige Folgerungen aus diesem Lemma gezogen werden. Es bedeute wie in Kapitel I U^+ diejenige von span(v) begrenzte abgeschlossene Halbebene von U:= span(u,v), die u enthält, und KK(u,v) den

von u und v aufgespannten konvexen Kegel

(1.11) $$KK(u,v) := \{\lambda u+\rho v \mid \lambda,\rho \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0,\ \rho \geq 0\},$$

der zwischen den Strahlen $\mathbb{R}^+u$ und $\mathbb{R}^+v$ liegt.

Wir nennen $\Sigma(\Delta)$ ein zulässiges U-Simplex, falls $\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$, wir nennen es ein Startsimplex, falls $\Sigma(\Delta) \cap \mathbb{R}^+u \neq \emptyset$ und ein Optimalsimplex, falls $\Sigma(\Delta) \cap \mathbb{R}^+v \neq \emptyset$. Dann folgt aus (I.2.3),(I.2.4),(I.2.5), daß ein Simplex $\Sigma(\Delta)$ genau dann Startsimplex, bzw. Optimalsimplex bzw. zulässiges U-Simplex ist, wenn x_Δ Startecke, bzw. Optimalecke, bzw. zulässige Schattenecke ist. Insbesondere gilt also

(1.12) $$\mathcal{T}_S = \{\Delta \in \mathcal{T}_R \mid \Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset\}.$$

Die durch den in (I.2.7) beschriebenen Algorithmus bestimmte Folge $x_{\Delta^0},\ldots,x_{\Delta^s}$ von sukzessiv benachbarten zulässigen Schattenecken, die jede zulässige Schattenecke x_Δ mit $Q(x_\Delta)>Q(x_{\Delta^0})$ genau einmal enthält, entspricht dann einer Folge

(1.13) $$\Sigma(\Delta^0),\Sigma(\Delta^1),\ldots,\Sigma(\Delta^s)$$

von sukzessiv benachbarten[1] zulässigen U-Simplexen, die mit einem Startsimplex beginnt.

Um sich die Eigenschaften dieser Folge zu veranschaulichen, bilden wir aus Y durch Schnitt mit U das zweidimensionale Polyeder $\hat{Y}$. Die Schnittsimplexe $\hat{\Sigma}(\Delta^i) = \Sigma(\Delta^i)\cap U$ bilden dann (wegen der Nichtentartungsbedingung (1.5)) eine zusammenhängende, in einer Richtung fortschreitende

[1] Zwei Simplexe $\Sigma(\Delta)$, $\Sigma(\Delta')$ mit Δ, $\Delta' \in \mathcal{T}_R$ heißen benachbart, wenn Δ und Δ' sich in genau einem Element unterscheiden.

Kantenfolge auf dem Rand des Polyeders $\hat{Y}$, wobei die "richtige" Fortschreitensrichtung durch die Forderung $\hat{\Sigma}(\Delta^i) \cap KK(u,v) \neq \emptyset$ festgelegt wird. Dies entspricht offenbar dem Fortschreiten in Richtung wachsender Q-Werte in der Eckenfolge (I.2.7).

In der dualen Interpretation kann die durch unseren theoretischen Simplexalgorithmus definierte Simplexfolge (1.13) folgendermaßen charakterisiert werden.

(1.14) Ausgehend von einem Startsimplex $\Sigma(\Delta^0)$ bilde man eine Folge $\Sigma(\Delta^0), \Sigma(\Delta^1), .., \Sigma(\Delta^s)$ sukzessiv benachbarter, sich nicht wiederholender Randsimplexe mit

$$\Sigma(\Delta^i) \cap KK(u,v) \neq \emptyset,$$

die mit $\Sigma(\Delta^s)$ abbricht.

Die durch (1.14) festgelegte Schrittzahl s kann wieder durch die Schrittzahlschranke

(1.15) $$s := \hat{s} + \delta_1 + \delta_2 , \qquad \tilde{s} := \#(\vartheta_s) - 1$$

nach oben abgeschätzt werden.

Nach Lemma 1 gilt hier für δ_1, δ_2 (man vergleiche (I.2.8))

(1.16)
$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & v \in \hat{Y} \\ 0 & v \notin \hat{Y} \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} & -v \in \hat{Y} \\ 0 & -v \notin \hat{Y} \end{cases}$$

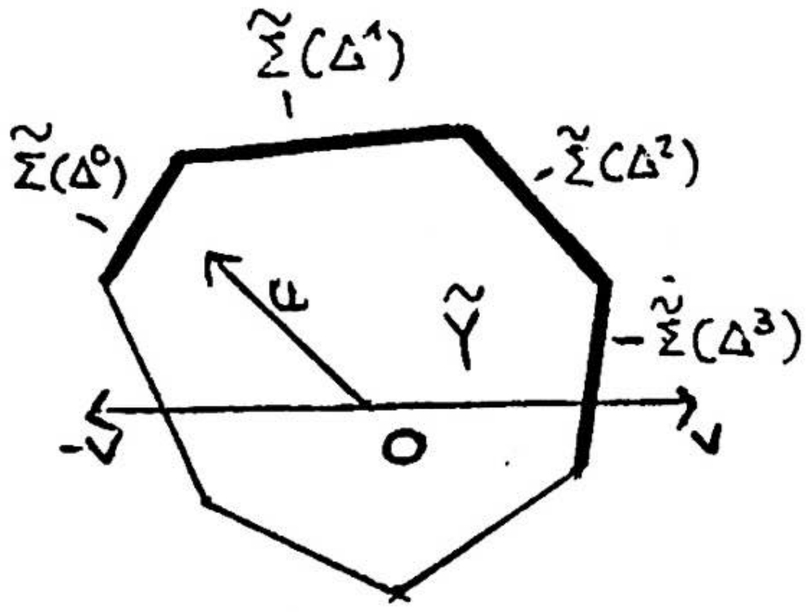
da Q(x) offenbar genau dann nach oben bzw. nach unten

beschränkt ist, wenn eine Ecke x_Δ existiert, zu der eine Stützhyperebene mit v bzw. -v als Außennormale gefunden werden kann.

Es ist bemerkenswert, daß unser theoretischer Algorithmus nicht nur in der primalen, sondern auch in der dualen Interpretation eine sehr einfache geometrische Bedeutung besitzt: Die Eindeutigkeit bei der Suche nach dem "Optimalsimplex" auf einer Folge benachbarter Randsimplexe wird hier einfach durch die "Schnittbedingung" $\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$ zusammen mit einer "Richtungsfestlegung" erzwungen.

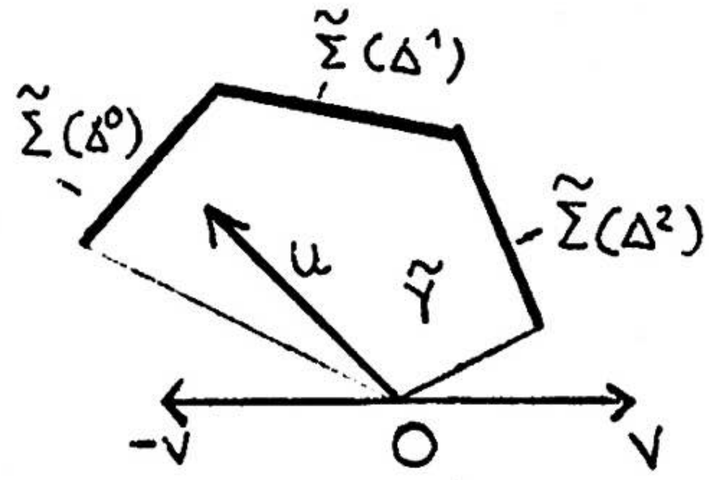
Die Bilder 1 bis 4 zeigen vier mögliche Konfigurationen für das Polyeder $\hat{Y}$.

Bild 1



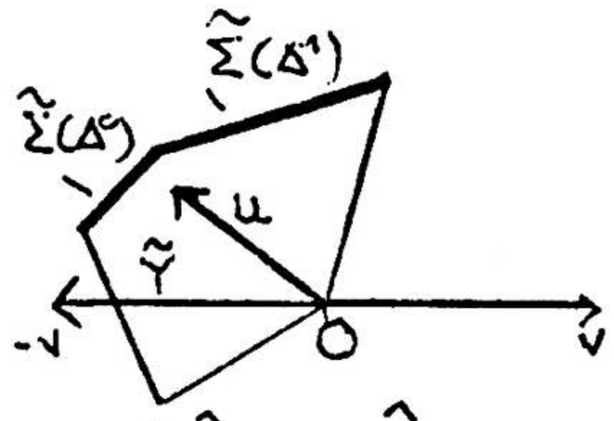
1) $v, -v \in \hat{Y}$
$s = 3, \tilde{S} = 4, S = 4$

Bild 2



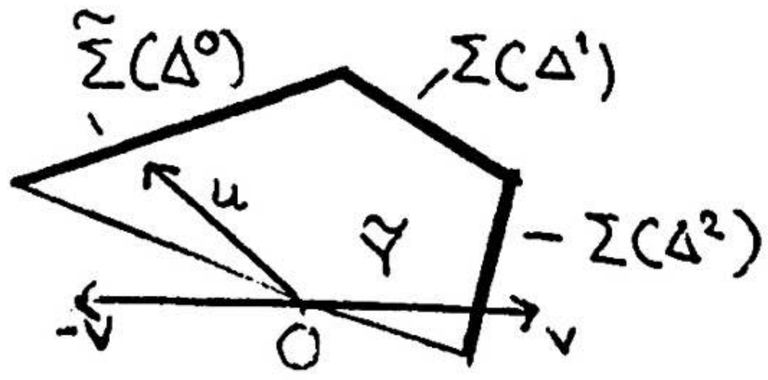
2) $v, -v \notin \hat{Y}$
$s = 2, \tilde{S} = 2, S = 3$

Bild 3



3) $v \notin \hat{Y}, -v \in \hat{Y}$;
$s = 1, \tilde{S} = 2, S = 2.5$

Bild 4



4) $v \in \hat{Y}, -v \notin \hat{Y}$
$s = 2, \tilde{S} = 3, S = 3.5$

Der noch ausstehende Beweis für Lemma 1 erfordert elementare Standardschlüsse aus der Theorie der Polyeder. Er soll deshalb hier nur kurz skizziert werden:

Ist x_Δ Ecke von X, und ist $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$, so ist durch

(1.17) $$w^T x = w^T x_\Delta$$

eine Stützhyperebene an X mit w als Außennormalenvektor definiert, falls

(1.18) $$w^T x \leq w^T x_\Delta \quad \text{für alle } x \in X \text{ gilt.}$$

Wegen $a_{\Delta_i}^T x_\Delta = 1 \quad (i = 1,\ldots,n)$ nach (I.1.3) folgt aus der Definition von X in (1.1), daß (1.18) erfüllt ist, falls man für w die Vektoren $a_{\Delta_1},\ldots,a_{\Delta_n}$ einsetzt. Die Gesamtheit der Vektoren w, die (1.18) erfüllen, bilden offensichtlich einen konvexen Kegel. Also erfüllen alle w aus dem von $a_{\Delta_1},\ldots,a_{\Delta_n}$ erzeugten konvexen Kegel die Bedingung (1.18).

Wendet man den Alternativsatz von Farkas an (vgl. z.B. [28] S. 31), so erkennt man, daß hier auch die Umkehrung gilt, dh. daß w genau dann Außennormale einer Stützhyperebene an X in x_Δ ist, wenn w in dem von $a_{\Delta_1},..,a_{\Delta_n}$ aufgespannten konvexen Kegel liegt, dh. falls (1.10) gilt.

§2 Eine Integraldarstellung für die Wahrscheinlichkeit w_R

Über den Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{W}$ der Matrizen

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \\ u^T \\ v^T \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(m,n)$$

soll jetzt die folgende, schon angekündigte Voraussetzung getroffen werden

(2.1) Die Vektoren $a_1,\ldots,a_m,u,v \in \mathbb{R}^n$ sind kollektiv unabhängig und besitzen die gleiche rotationssymmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung im $\mathbb{R}^n$.

Vorläufig soll sogar zusätzlich verlangt werden:

(2.2) Die rotationssymmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung von (2.1) besitzt eine Dichtefunktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Der (2.1),(2.2) zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum auf $\mathbb{R}^n$ werde mit μ bezeichnet.
Ist z eine Zufallsgröße über μ, so gilt für den Erwartungswert also (falls er existiert):

$$(2.3) \qquad E_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} z(x) f(x)\,dx$$

und analog für eine Zufallsvariable Z über $\mathfrak{W}$

$$(2.4) \qquad E_{\mathfrak{W}}(Z) = \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} Z(\hat{A}) f(a_1)..f(a_m) f(u) f(v)\, da_1..da_m\, du\, dv .$$

Es sei nun

$$(2.5) \qquad g(h) := \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x^1,\ldots,x^{n-1},h)\, dx^1 \ldots dx^{n-1}$$

$$G(h) := \int_{-\infty}^{h} g(x^n)\, dx^n .$$

Definiert man für $h \in \mathbb{R}$ die Hyperebene H und den Halbraum H^+ durch

$$(2.6) \qquad H := \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = h\}$$

$$H^+ := \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \leq h\}$$

und bezeichnet χ_{H^+} die Indikatorfunktion von H^+, so ist

$$(2.7) \qquad G(h) = E_{n\sigma}(\chi_{H^+}) .$$

$G(h)$ ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ in H^+ liegt.

Wir wollen nun voraussetzen, daß $\hat{A} \in \mathfrak{A}(m,n)$ nichtentartet sei. Dann bezeichnen wir mit $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$, $H(a_1,\ldots,a_n)$, $H^+(a_1,\ldots,a_n)$ das von $a_1,\ldots,a_n$ aufgespannte $(n-1)$-dimensionale Simplex bzw. die von $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$ aufgespannte Hyperebene bzw. den von $H(a_1,\ldots,a_n)$ begrenzten abgeschlossenen Halbraum, der O enthält. Schließlich sei $h(a_1,\ldots,a_n)$ (>0) der Abstand zwischen O und der Hyperebene $H(a_1,\ldots,a_n)$. $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$ ist offenbar genau dann Randsimplex des Polyeders $Y=Y(\hat{A})$, falls

$$(2.8) \qquad a_{n+1},\ldots,a_m \in H^+(a_1,\ldots,a_n).$$

Definieren wir die Indikatorfunktion

$$(2.9)\qquad \eta_R(\hat{A}) := \begin{cases} 1 & \hat{A} \text{ ist nicht entartet und} \\ & \Sigma(a_1,\ldots,a_n) \text{ ist Randsimplex} \\ & \text{von } Y(\hat{A}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist

$$(2.10)\qquad w_R := E_{\partial\mathcal{O}}(\eta_R) = \int_{\mathbb{R}^n}\ldots\int_{\mathbb{R}^n} \eta_R(\hat{A}) f(a_1)..f(a_m) f(u) f(v)\, da_1..da_m\, du\, dv$$

also gerade die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\hat{A}$ nicht entartet und $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$ Randsimplex von $Y(\hat{A})$ ist.

Die Integraldarstellung (2.10) für w_R soll nun umgeformt und vereinfacht werden. Wegen (2.8) gilt für nicht entartete $\hat{A}$:

$$(2.11)\qquad \eta_R(\hat{A}) = \prod_{i=n+1}^{m} \chi_{H^+(a_1,\ldots,a_n)}(a_i)\,.$$

Verwendet man in (2.10), daß $\eta_R(\hat{A})$ nicht von u, v abhängt, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\,dv = 1\,,$$

sowie die aus der Rotationssymmetrie von f und aus (2.8) folgende Beziehung

$$(2.12)\qquad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H^+(a_1,\ldots,a_n)}(a_i) f(a_i)\,da_i = G(h(a_1,\ldots,a_n)),$$

so ergibt sich aus (2.10-12)

$$(2.13)\qquad w_R = \int_{\mathbb{R}^n}\ldots\int_{\mathbb{R}^n} G(h(a_1,\ldots,a_n))^{m-n} f(a_1)..f(a_n)\,da_1..da_n\,,$$

wobei davon Gebrauch gemacht wurde, daß die entarteten $\hat{A}$ eine Nullmenge in $\partial\mathcal{O}$ darstellen.

Wir fassen das Integral als Integral über demjenigen Teil des Raumes $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^2}$ auf, auf dem $a_1,\ldots,a_n$ linear unabhängig sind und führen neue Integrationsvariablen ein.

Zu diesem Zweck sei $d_n \in \mathbb{R}^n$ derjenige Vektor der Länge 1, der senkrecht auf $H(a_1,\ldots,a_n)$ steht und von O aus in die Richtung von H weist.

Der Vektor d_n besitze nun die Polarkoordinatendarstellung

$$(2.14) \qquad d_n = \begin{bmatrix} \sin\psi_1 \sin\psi_2 \ldots\ldots\ldots \sin\psi_{n-1} \\ \cos\psi_1 \sin\psi_2 \ldots\ldots\ldots \sin\psi_{n-1} \\ \cos\psi_2 \sin\psi_3 \ldots\ldots \sin\psi_{n-1} \\ \vdots \\ \cos\psi_{n-2} \sin\psi_{n-1} \\ \cos\psi_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit $\psi_1 \in [0,2\pi)$, $\psi_i \in [0,\pi]$ $\quad i = 2,\ldots,n-1$.

Durch die Festsetzung

$$(2.15) \qquad d_k := \frac{1}{\sin\psi_{k+1} \cdots \sin\psi_{n-1}} \frac{\partial d_n}{\partial \psi_k} \qquad k = 1,\ldots,n-1$$

(die im Sinne des Grenzübergangs für $\psi_i \to +0$ zu verstehen ist, falls der Nenner in (2.15) verschwindet) erhalten wir ein Orthonormalsystem $d_1,\ldots,d_n$:

Man rechnet leicht nach, daß sich aus (2.15) die Darstellung

$$(2.16) \qquad d_k = \begin{pmatrix} \sin\psi_1 \sin\psi_2 \cdots\cdots\cdots \sin\psi_{k-1} \cos\psi_k \\ \cos\psi_1 \sin\psi_2 \cdots\cdots\cdots \sin\psi_{k-1} \cos\psi_k \\ \cos\psi_2 \sin\psi_3 \cdots\cdots\cdots \sin\psi_{k-1} \cos\psi_k \\ \vdots \\ \cos\psi_{k-2} \sin\psi_{k-1} \cos\psi_k \\ \cos\psi_{k-1} \cos\psi_k \\ -\sin\psi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt, mit deren Hilfe die Orthonormalität leicht nachgerechnet werden kann.

Mit Hilfe der orthogonalen Matrix

$$(2.17) \qquad R = (d_1 | d_2 | \ldots | d_n)$$

mit den d_k als Spaltenvektoren erhält man in der Form

$$(2.18) \qquad \bar{b}_i := R^{-1} a_i$$

die neuen Koordinatenvektoren der Vektoren $a_1,\ldots,a_n$ in Bezug auf die Orthonormalbasis $(d_1,\ldots,d_n)$. Da die von $a_1,\ldots,a_n$ aufgespannte Hyperebene $H(a_1,\ldots,a_n)$ in dem neuen Koordinatensystem die Darstellung $\{(y^1,\ldots,y^n) | y^n=h\}$ besitzt, sind die Vektoren $\bar{b}_i$ von der Form

$$(2.19) \qquad \bar{b}_i := (b_i^1,\ldots,b_i^{n-1},h)^T \quad i = 1,\ldots,n.$$

Wir verwenden noch die Abkürzungen

(2.20) $$b_i := (b_i^1, \ldots, b_i^{n-1})^T$$

sowie

(2.21) $$B := \begin{bmatrix} b_1^1 & \ldots & b_1^{n-1} & 1 \\ b_2^1 & \ldots & b_2^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n^1 & \ldots & b_n^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Führt man nun, unter Vernachlässigung derjenigen Punkte $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$, für die $(a_1,\ldots,a_n)$ linear abhängig sind und die bekanntlich eine Nullmenge darstellen, statt der Koordinaten $a_1^1,\ldots,a_1^n,\ldots,a_n^1,\ldots,a_n^n$ die Größen $b_1^1,\ldots,b_1^{n-1},\ldots,b_n^1,\ldots,b_n^{n-1},\psi_1,\ldots,\psi_{n-1},h$ als neue Koordinaten ein, so geht das Integral (2.13) über in

(2.22) $$w_R = \int_{\mathbb{R}^n} \ldots \int_{\mathbb{R}^n} G(h)^{m-n}\, J\, f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)\, db_1..db_n d\psi_1..d\psi_{n-1} dh$$

wobei J der Betrag der Funktionaldeterminante dieser Koordinatentransformation ist:

$$J := \left| \frac{\partial(a_1^1,\ldots,a_n^n)}{\partial(b_1^1,\ldots,b_n^{n-1},\psi_1,..,\psi_{n-1},h)} \right| .$$

Wir haben dabei benutzt, daß wegen der Rotationssymmetrie von f gilt $f(a_i) = f(\bar{b}_i)$.

Im Anhang (V §1) wird bewiesen

<u>Lemma 2</u>

(2.23) $$J = |\det B|\ (\sin\psi_2)^1 \ldots\ldots (\sin\psi_{n-1})^{n-2}$$

$(\sin\psi_2)^1(\sin\psi_3)^2....(\sin\psi_{n-1})^{n-2}d\psi_1 d\psi_2 d\psi_3....d\psi_{n-1}$

ist aber gerade das Oberflächenelement der Sphäre ω_n, so daß $|\omega_n|$, das Lebesguemaß von ω_n, die Darstellung

$$(2.24)\quad |\omega_n| := \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}..\int_0^{\pi} (\sin\psi_2)^1..(\sin\psi_{n-1})^{n-2}d\psi_1..d\psi_{n-1}$$

besitzt.

Weiter gilt (vergleiche (2.5))

$$(2.25)\quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\bar{b}_i)db_i = \int_{\mathbb{R}},..\int_{\mathbb{R}} f(b_i^1,..,b_i^{n-1},h)db_i^1..db_i^{n-1}=g(h).$$

Führen wir schließlich noch die Funktion $\Lambda_R(h)$ ein durch

$$(2.26)\quad \Lambda_R(h)=\frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdot\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\det B|\, f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)db_1..db_n}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}..\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)db_1..db_n}$$

$$= \frac{1}{g(h)^n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdot\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\det B|\, f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)db_1..db_n$$

(die als bedingter Erwartungswert gedeutet werden kann), so können wir unter Benutzung von (2.17-21) schließlich schreiben:

$$(2.27)\quad w_R=|\omega_n|\int_0^{\infty} G(h)^{m-n}g(h)^n\Lambda_R(h)dh.$$

§3 Eine Integraldarstellung für $E_{\mathcal{SO}}(S)$

Für die angestrebte Integraldarstellung von $E_{\mathcal{SO}}(S)$ ist es zweckmäßig, zunächst die Wahrscheinlichkeit

$$(3.1)\quad w_S := E_{\mathcal{SO}}(\eta_S) := \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \eta_S(\hat{A}) f(a_1) \cdots f(a_m) f(u) f(v) da_1 \cdots da_m du dv$$

mit

$$(3.2)\quad \eta_S(\hat{A}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \hat{A} \text{ nicht entartet,} \\ & \Sigma(a_1,\ldots,a_n) \text{ Randsimplex von } Y(\hat{A}) \text{ ist} \\ & \text{und } \bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1}) \cap U^+ \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auszuwerten. Hierbei bedeutet in (3.2) $\bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1})$ das von $a_1,\ldots,a_{n-1}$ aufgespannte (n-2)-dimensionale Simplex, das ein Randsimplex von $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$ ist.

Definieren wir

$$(3.3)\quad \zeta_{\bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1})}(u,v) := \begin{cases} 1 & \text{falls } u,v \text{ linear unabhängig} \\ & \text{und } \bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1}) \cap U^+ \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$(3.4)\quad W(a_1,\ldots,a_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_{\bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1})}(u,v) f(u) f(v) du dv ,$$

so folgt zunächst für nicht entartete $\hat{A}$:

$$(3.5)\quad \eta_S(\hat{A}) = \prod_{i=n+1}^{m} \eta_{H^+(a_1,\ldots,a_n)}(a_i) \zeta_{\bar{\Sigma}(a_1,\ldots,a_{n-1})}(u,v)$$

und hieraus in analoger Weise wie in §2:

$$(3.6)\quad w_S = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} G(h(a_1,\ldots,a_n))^{m-n} W(a_1,\ldots,a_{n-1}) f(a_1) \cdots f(a_n) \, da_1 \cdots da_n$$

In (3.6) führen wir jetzt die Koordinatentransformation von §2 durch. Aus der Definition (3.4) für W folgt unmittelbar, daß $W(a_1,\ldots,a_{n-1})=W(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})$, so daß man mit Hilfe der Funktion

$$(3.7)\quad \Lambda_S(h)= \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B| W(\bar{b}_1,..,\bar{b}_{n-1}) f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)\, db_1..db_n}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)\, db_1..db_n}$$

$$=\frac{1}{g(h)^n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B| W(\bar{b}_1,..,\bar{b}_{n-1}) f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n)\, db_1..db_n$$

die Darstellung

$$(3.8)\quad w_S= |\omega_n| \int_0^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_S(h)\, dh$$

erhält.

Für die späteren Auswertungen von $\Lambda_S(h)$ ist die in Lemma 3 angegebene Charakterisierung von $W(a_1,..,a_{n-1})$ wichtig:

$a_1,\ldots,a_{n-1}$ seien linear unabhängig und $\bar{\Omega}_{n-1}$ sei die (n-1)-dimensionale Einheitskugel in dem von $a_1,..,a_{n-1}$ aufgespannten Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $KK(a_1,..,a_{n-1})$ der von $a_1,..,a_{n-1}$ aufgespannte konvexe Kegel. $|.|$ sei das (n-1)-dimensionale Lebesgue-Maß in diesem Teilraum.

Lemma 3

$$(3.9)\quad W(a_1,..,a_{n-1}) = \frac{|KK(a_1,\ldots,a_{n-1})\cap\bar{\Omega}_{n-1}|}{|\bar{\Omega}_{n-1}|}$$

Zum Beweis von (3.9) soll die Behauptung zunächst verallgemeinert werden:

Es sei $\bar{\omega}_{n-1}$ die Kugeloberfläche der Kugel $\bar{\Omega}_{n-1}$. Für eine meßbare Teilmenge $B \subset \bar{\omega}_{n-1}$ sei $K(B)$ der von B erzeugte Kegel. Dann wird durch

$$(3.10) \qquad \mu_1(B) := \frac{|K(B) \cap \bar{\Omega}_{n-1}|}{|\bar{\Omega}_{n-1}|}$$

offenbar ein rotationssymmetrisches Maß auf $\bar{\omega}_{n-1}$ definiert, für das

$$(3.11) \qquad \mu_1(\bar{\omega}_{n-1}) = 1$$

gilt. Wir definieren weiter

$$(3.12) \quad \zeta_{K(B)}(u,v) = \begin{cases} 1 & u,v \text{ sind linear unabhängig} \\ & \text{und } U^+ \cap K(B) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei der folgenden Betrachtung können wir uns auf den Fall beschränken, daß je n Vektoren der $a_1,..,a_{n-1},u,v$ linear unabhängig sind, weil die Entartungsmengen stets Nullmengen sind. Bis auf Entartungsfälle ist $U \cap K(\bar{\omega}_{n-1})$ ein eindimensionaler Teilraum und für disjunkte Mengen $B_1, B_2 \subset \bar{\omega}_{n-1}$ haben die Mengen

$$M_i := \{(u,v) \mid \zeta_{K(B_i)}(u,v) = 1\} \qquad i = 1,2$$

einen Durchschnitt vom Maß 0 auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Hieraus kann man leicht entnehmen, daß durch

$$(3.13) \qquad \mu_2(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_{K(B)}(u,v) f(u) f(v) \, du dv$$

ebenfalls ein Maß auf $\bar{\omega}_{n-1}$ gegeben wird, das wegen der Rotationssymmetrie von f ebenfalls rotationssymmetrisch ist. Weiter gilt, daß für $B = \bar{\omega}_{n-1}$ die Indikatorvariable $\zeta_{K(\bar{\omega}_{n-1})}(u,v)$ nur auf einer Nullmenge verschwindet, so daß auch

$$(3.14) \qquad \mu_2(\bar{\omega}_{n-1}) = 1 \ .$$

Da es bekanntlich aufgrund der Theorie des Haarschen Maßes auf $\bar{\omega}_{n-1}$ nur ein rotationssymmetrisches Maß μ mit der Normierungsbedingung $\mu(\bar{\omega}_{n-1}) = 1$ gibt (vergleiche z.B.[29]) , so folgt daraus $\mu_1 = \mu_2$ und damit, wenn man speziell $B = KK(a_1,\ldots,a_{n-1}) \wedge \bar{\omega}_{n-1}$ setzt, die Behauptung von Lemma 3.

Unter Benutzung der Darstellung (3.8) für w_S können wir jetzt als Hauptresultat dieses Kapitels die angekündigte Integraldarstellung für $E_{\partial\mathcal{D}}(S)$ angeben.

Satz 1

$$(3.15) \qquad E_{\partial\mathcal{D}}(S) = \frac{n}{2}\binom{m}{n} |\omega_n| \int_0^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_S(h) \, dh$$

Beweis

Es sei $\bar{\vartheta}$ die Menge der (n-1)-elementigen Teilmengen

$\bar{\Delta} = \{\bar{\Delta}_1,\ldots,\bar{\Delta}_{n-1}\}$ mit $1 \leq \bar{\Delta}_1 < \ldots < \bar{\Delta}_{n-1} \leq m$

von $\{1,\ldots,m\}$ und

$$(3.16) \qquad \tilde{\mathfrak{S}} = \{(\Delta,\bar{\Delta}) \mid \Delta \in \vartheta,\ \bar{\Delta} \in \bar{\mathfrak{F}},\ \bar{\Delta} \subset \Delta\}.$$

Offenbar gilt

$$(3.17) \qquad \#(\tilde{\mathfrak{S}}) = n \binom{m}{n}.$$

Für $\Delta \in \bar{\vartheta}$ und eine nicht entartete Matrix $\hat{A} \in \mathcal{C}(m,n)$ sei $\Sigma(\bar{\Delta})$ das von $a_{\bar{\Delta}_1},\ldots,a_{\bar{\Delta}_{n-1}}$ aufgespannte (n-1)-dimensionale Simplex. Für $(\Delta,\bar{\Delta}) \in \tilde{\mathfrak{S}}$ ist $\Sigma(\bar{\Delta})$ jeweils ein Randsimplex von $\Sigma(\Delta)$. Für $(\Delta,\bar{\Delta}) \in \tilde{\mathfrak{S}}$ werde definiert:

$$(3.18) \qquad \zeta_S^{(\Delta,\bar{\Delta})}(\hat{A}) := \begin{cases} 1 & \text{A ist nicht entartet} \\ & \Sigma(\Delta) \text{ ist Randsimplex und} \\ & \Sigma(\bar{\Delta}) \cap U^+ \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$(3.19) \qquad w_S(\Delta,\bar{\Delta}) := E_{\mathfrak{N}\mathcal{O}}(\zeta_S^{(\Delta,\bar{\Delta})}(\hat{A})).$$

Aus der Voraussetzung (2.1) über $\mathfrak{N}\mathcal{O}$ ergibt sich unmittelbar, daß wegen $w_S(\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,n-1\}) = w_S$

$$(3.20) \qquad w_S(\Delta,\bar{\Delta}) = w_S \quad \text{für alle } (\Delta,\bar{\Delta}) \in \tilde{\mathfrak{S}}.$$

Lemma 4

$\hat{A}$ sei nicht entartet. Dann gilt

$$(3.21) \qquad S(\hat{A}) = \frac{1}{2} \sum_{(\Delta,\bar{\Delta}) \in \tilde{\mathfrak{S}}} \zeta_S^{(\Delta,\bar{\Delta})}(\hat{A}).$$

Aus (3.21) folgt dann wegen (3.17) und (3.19)

$$(3.22) \qquad E_{\mathcal{H}_0}(S) = \frac{1}{2} \sum_{(\Delta,\bar{\Delta})\in\tilde{\mathcal{S}}} w_S(\Delta,\bar{\Delta}) = \frac{n}{2}\binom{m}{n} w_S$$

und hieraus mit (3.8) die Behauptung von Satz 1.

Beweis von Lemma 4

$\Sigma(\Delta^0),\Sigma(\Delta^1),\ldots,\Sigma(\Delta^{\tilde{S}})$ sei eine Simplexfolge gemäß (1.14) von maximaler Länge in U^+.

Es gebe also $\tilde{S}+1$ zulässige U-Simplexe.

Es sei $\bar{\Delta}^i = \Delta^{i-1} \cap \Delta^i$ und

$\tilde{\Sigma}(\Delta^i) = \Sigma(\Delta^i) \cap U$, $\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta}^i) = \Sigma(\bar{\Delta}^i) \cap U$.

In der Folge

$$(3.23) \qquad \tilde{\Sigma}(\Delta^0),\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta}^1),\tilde{\Sigma}(\Delta^1),\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta}^2),\ldots,\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta}^{\tilde{S}}),\tilde{\Sigma}(\Delta^{\tilde{S}})$$

sind abwechselnd die Punkte und Kanten auf dem Rand von $\tilde{Y}$ aufgeführt, die in dieser Reihenfolge durchlaufen werden, wenn man auf dem Rand von $\tilde{Y}$ von der "Anfangskante" $\tilde{\Sigma}(\Delta^0)$ bis zur "Endkante" $\tilde{\Sigma}(\Delta^{\tilde{S}})$ wandert.

Da alle $\Sigma(\Delta^i)$ Randsimplexe sind ($i=0,\ldots,\tilde{S}$) und alle $\Sigma(\bar{\Delta}^i)$ ($i=1,.,\tilde{S}$) die Bedingung $\Sigma(\bar{\Delta}^i)\cap U^+\neq\emptyset$ (die mit $\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta}^i) \in U^+$ äquivalent ist) erfüllen, haben wir die $2\tilde{S}$ Paare $(\Delta^{i-1},\bar{\Delta}^i)$ bzw. $(\Delta^i,\bar{\Delta}^i)$ ($i=1,\ldots,\tilde{S}$), die

$$(3.24) \qquad \zeta_S{}^{(\Delta,\bar{\Delta})}(\hat{A}) = 1 \qquad \text{genügen.}$$

Genau dann, wenn $-v \notin \hat{Y}$, gehört auch noch der äußere Endpunkt $\tilde{\Sigma}(\bar{\Delta})$ der Kante $\tilde{\Sigma}(\Delta^0)$ zu U^+, so daß noch ein zusätzliches Paar $(\Delta^0,\bar{\Delta})$ die Bedingung (3.24) erfüllt.

Analog tritt noch ein Paar der Art $(\Delta^{\partial S}, \bar{\Delta})$ am anderen Ende des Kantenzuges hinzu, falls $v \notin \hat{Y}$.

Vergleicht man diese Diskussion mit der Definition (1.15) von S, so ergibt sich (3.21).

Man vergleiche zur Veranschaulichung die Bilder 5 und 6 .

Bild 5

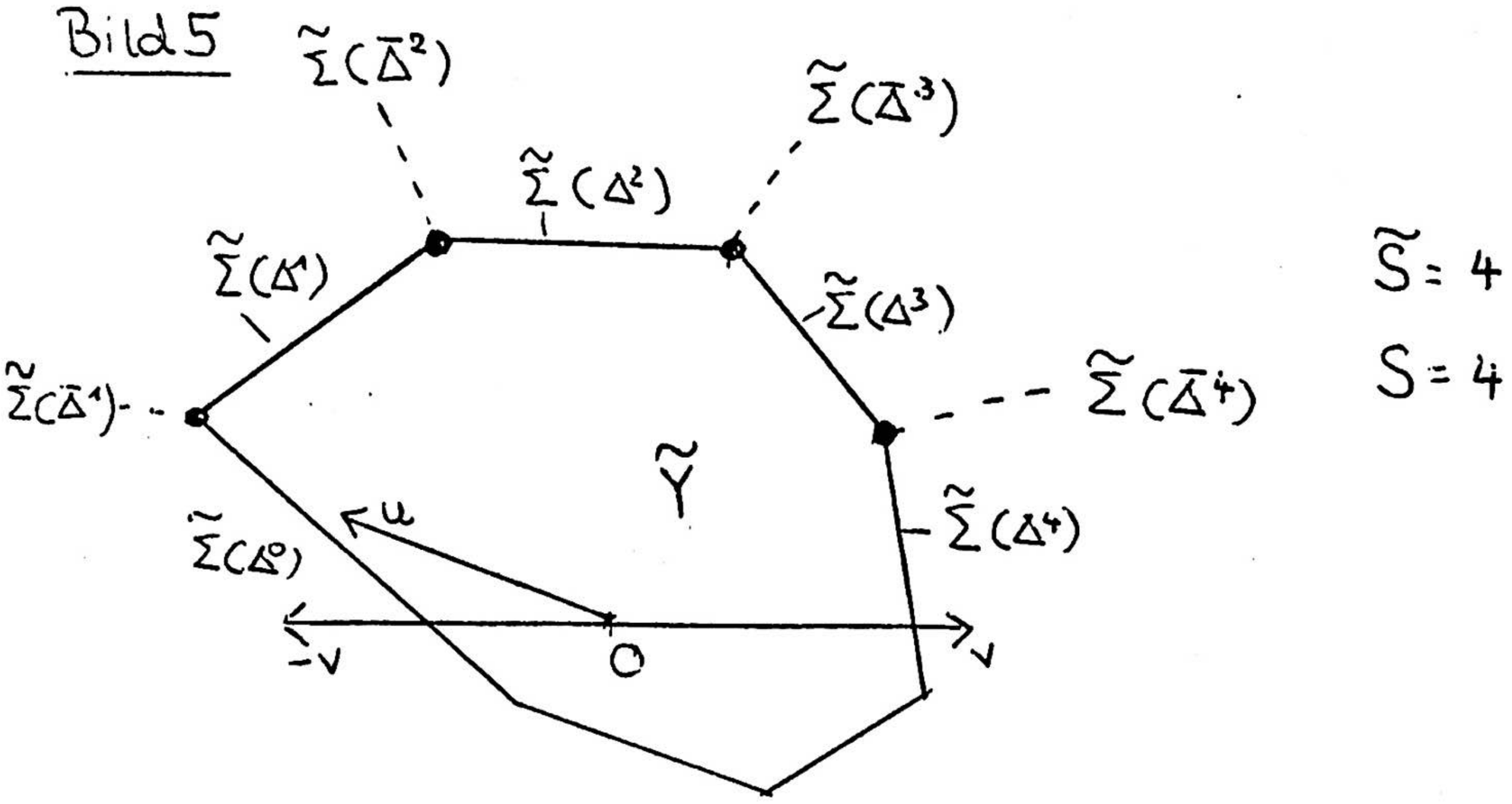
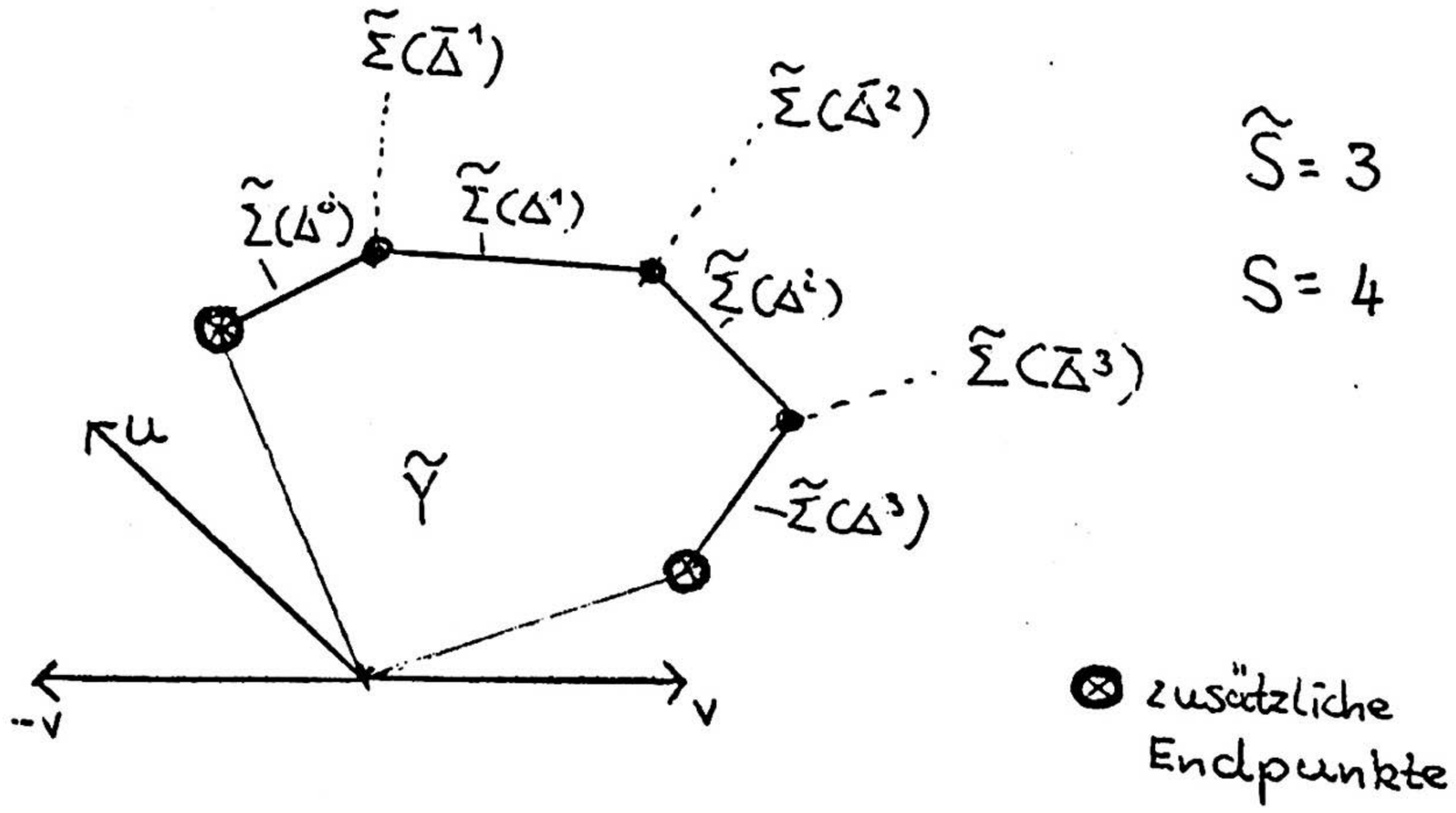


Bild 6



§4 Abschätzungen für $E_{no}(S)$

Bei der Auswertung der Integraldarstellung (3.15)

bereitet die in (3.7) definierte Funktion

$$\Lambda_S(h) = \frac{1}{g(h)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B| W(\bar{b}_1,..,\bar{b}_{n-1}) f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n) db_1..db_n$$

die Hauptschwierigkeiten. In diesem Paragraphen soll daher gezeigt werden, wie man für $\Lambda_S(h)$ Abschätzungen gewinnen kann, die dann für spezielle Verteilungen zu expliziten Schranken führen.

Da aufgrund der Definition (3.4) stets

$0 \leq W(a_1,...,a_{n-1}) \leq 1$ gilt, folgt aus (2.26),(3.7) unmittelbar, daß stets

$$(4.1) \qquad \Lambda_S(h) \leq \Lambda_R(h) \qquad \text{für } h > 0.$$

Diese Abschätzung ist aber nur für kleine Werte $h>0$ brauchbar und kann (mit Ausnahme bei sehr kleinen h-Werten) durch die nachfolgenden Abschätzungen verbessert werden. Wir wenden hierzu die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf das Integral im Zähler von $\Lambda_S(h)$ an und erhalten:

$$(4.2) \qquad \Lambda_S(h) \leq \sqrt{\Lambda_1(h)}\ \sqrt{\Lambda_2(h)}$$

mit

$$(4.3) \qquad \Lambda_1(h) := \frac{1}{g(h)^n} \int_{R^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\det B)^2 f(\bar{b}_1)..f(\bar{b}_n) db_1.db_n$$

und

$$(4.4)\qquad \Lambda_2(h) := \frac{1}{g(h)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} W(\bar{b}_1,..,\bar{b}_{n-1})^2 f(\bar{b}_1).f(\bar{b}_n)\, db_1 \cdot db_n .$$

Es sei nun $\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})$ das von $0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}$ aufgespannte (n-1)-Simplex. Da die von $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ aufgespannte Hyperebene den Abstand h vom Nullpunkt hat, gilt für h>0:

$$(4.5)\qquad KK(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}) \cap \bar{\Omega}_{n-1} \subset \bar{\Omega}_{n-1} \subset \Sigma(0,\tfrac{1}{h}\bar{b}_1,\ldots,\tfrac{1}{h}\bar{b}_{n-1})$$

und daher

$$(4.6)\qquad W(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}) \leq \frac{1}{|\Omega_{n-1}|}\,\frac{1}{h^{n-1}}\,|\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})|$$

$$= \frac{1}{|\Omega_{n-1}|}\,\frac{1}{h^{n-1}}\,\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k^{\,2}}\ ,$$

wobei die D_k die (n-1)-reihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$(4.7)\qquad \begin{bmatrix} b_1^1 & \cdots & b_1^{n-1} & h \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1}^1 & \cdots & b_{n-1}^{n-1} & h \end{bmatrix}$$

darstellen. Ist D_k die Unterdeterminante, die man durch Streichen der k-ten Spalte erhält, so gilt also speziell

$$(4.8)\qquad D_{n-1} = h \cdot \det \begin{bmatrix} b_1^1 & \cdots & b_1^{n-2} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1}^1 & & b_{n-1}^{n-2} & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$(4.9) \qquad D_n = \det \begin{bmatrix} b_1^1 \cdots\cdots b_1^{n-1} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ b_{n-1}^1 \cdots\cdots b_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Zur Abschätzung von $\Lambda_1(h)$ benutzen wir die Darstellung

$$\det B = \det \begin{bmatrix} b_1^1 \cdots\cdots b_1^{n-1} & 1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ b_n^1 \cdots\cdots b_n^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} \tilde{b}_i^{\sigma(i)} ,$$

wobei $$\tilde{b}_i^j := \begin{cases} b_i^j & j = 1,\dots,n-1 \\ 1 & j = n \end{cases} .$$

Demnach gilt

$$(4.10) \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\det B)^2 \prod_{i=1}^{n} f(\bar{b}_i)\, db_1 .. db_n$$

$$= \sum_{\sigma,\tau \in S(n)} \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\tau \Big\{ \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{b}_i^{\sigma(i)} \tilde{b}_i^{\tau(i)} f(\bar{b}_i)\, db_i \Big\} .$$

Wir definieren nun für h>0: *(O.B.d.A. sei (4.10) endlich)

$$(4.11) \quad g_1(h) := \frac{1}{g(h)} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} (x^1)^2 f(x^1,..,x^{n-1},h)\, dx^1 .. dx^{n-1} .$$

Dann gilt wegen der Rotationssymmetrie von f:

$$(4.12) \quad \frac{1}{g(h)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{b}_i^j \tilde{b}_i^k f(\bar{b}_i)\, db_i = \begin{cases} 1 & j = k = n \\ g_1(h) & j=k \in \{1,..,n-1\} \\ 0 & j \neq k \end{cases} .$$

* Es gilt $g_1 = \infty$, falls (4.10.) unendlich wird. Die weiteren Abschätzungen bleiben richtig.

Aus (4.11) und (4.12) ergibt sich daher, daß in (4.10) nur die n! Summanden mit $\sigma = \tau \in S(n)$ auftreten und daß in jedem dieser Summanden im zugehörigen Produkt ein Faktor nach dem ersten Fall von (4.12) und (n-1) Faktoren nach dem zweiten Fall von (4.12) ausgewertet werden können, so daß sich für das Integral in (4.10) der Wert

$$n! g_1(h)^{n-1} g(h)^n$$

und damit

$$(4.13) \qquad \Lambda_1(h) = n! g_1(h)^{n-1}$$

ergibt.

In analoger Weise beweist man, daß

$$(4.14) \qquad \frac{1}{g(h)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_n^2 \prod_{i=1}^{n-1} f(\bar{b}_i)\, db_1 .. db_n$$

$$= (n-1)! g_1(h)^{n-1}$$

und

$$(4.15) \qquad \frac{1}{g(h)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} D_k^2 \prod_{i=1}^{n-1} f(\bar{b}_i)\, db_1 .. db_n$$

$$= (n-1)! g_1(h)^{n-2} h^2 .$$

Bei der Auswertung von (4.4) beachte man, daß (4.15) aus Symmetriegründen für k=1,..,n-1 übereinstimmt, so daß man sich z.B. auf der Fall k=(n-1) mit D_k nach (4.8) beschränken kann. Damit ergibt sich

$$(4.16) \quad \Lambda_2(h) \leq \frac{1}{|\Omega_{n-1}|^2} \frac{1}{h^{2n-2}} \frac{1}{(n-1)!} g_1(h)^{n-2} (g_1(h) + (n-1)h^2)$$

und hieraus nach (4.2)

Lemma 5

Für h>0 gilt:

$$\Lambda_S(h) \leq \Lambda_R(h) \tag{4.17}$$

sowie

$$\Lambda_S(h) \leq \frac{1}{|\Omega_{n-1}|}\,\frac{1}{h^{n-1}}\sqrt{n}\; g_1(h)^{n-\frac{3}{2}}\;\sqrt{g_1(h)+(n-1)h^2}\,. \tag{4.18}$$

In den späteren Auswertungen von $E_{\partial\varphi}(S)$ für spezielle Verteilungen wird der Integrationsbereich $(0,\infty)$ für h in zwei Teile $(0,q),(q,\infty)$ zerlegt. Im ersten Intervall wird $\Lambda_S(h)$ durch $\Lambda_R(h)$ und im zweiten Intervall durch (4.18) abgeschätzt. Hierbei kann die Wahl von q geeignet getroffen werden. Die hierbei verwendete Abschätzung kann damit so formuliert werden:

Satz 2

Es sei q>0 beliebig. Dann gilt

$$E_{\partial\varphi}(S) \leq \binom{m}{n}\frac{n}{2}\,|\omega_n| \int_0^q G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_R(h)\,dh \tag{4.19}$$

$$+ \binom{m}{n}\frac{n}{2}^{\frac{3}{2}}\frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|}\int_q^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n \frac{1}{h^{n-1}}\; g_1(h)^{n-\frac{3}{2}}\sqrt{g_1(h)+(n-1)h^2}\,dh\,.$$

Man kann auf verhältnismäßig einfache Weise eine Abschätzung nach unten für $E_{n0}(S)$ erhalten, wenn die Vektoren $a_1,\ldots,a_m,u,v$ auf einem beschränkten Bereich des $\mathbb{R}^n$ verteilt sind. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß

$$(4.20) \qquad f(x) = 0 \quad \text{für} \quad ||x|| > 1 .$$

Da für Vektoren $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n \in \Omega_n$ (vgl. (4.5))
$KK(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}) \cap \bar{\Omega}_{n-1} > \Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})$[1] gilt,
folgt nach (3.9)

$$(4.21) \qquad W(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}) \geq \frac{1}{|\Omega_{n-1}|} |\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})| .$$

Es sei $\bar{h}$ der Abstand des Vektors $\bar{b}_n$ von der durch $0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}$ aufgespannten Hyperebene. Da der Abstand zwischen zwei Punkten der Menge $\{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y|| \leq 1,\ y^n = h\}$ durch $2\sqrt{1-h^2}$ abgeschätzt werden kann, gilt
$\bar{h} \leq 2\sqrt{1-h^2}$.
Bezeichnen wir mit $|\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)|_{\mathbb{R}^n}$ das n-dimensionale Volumen des durch $0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ aufgespannten n-Simplexes, so gilt

$$(4.22) \qquad |\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)|_{\mathbb{R}^n} = \frac{\bar{h}}{n} |\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})| .$$

Wegen $|\Sigma(0,\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)|_{\mathbb{R}^n} = \frac{h}{n!} |\det B|$ und $\bar{h} \leq 2\sqrt{1-h^2}$
folgt aus (4.21),(4.22)

$$(4.23) \qquad W(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1}) \geq \frac{h}{2\sqrt{1-h^2}} \frac{1}{|\Omega_{n-1}|\,(n-1)!} |\det B|$$

[1] Mit $\Sigma(a_1,..,a_r)$ $r \leq n+1$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir $KH(a_1,..,a_r)$.

und damit mit der vorhergehenden Auswertung des Integrals (4.10)

$$(4.24)\qquad \Lambda_S(h) \geq \frac{h}{2\sqrt{1-h^2}}\,\frac{1}{g(h)^n}\,\frac{1}{|\Omega_{n-1}|\,(n-1)!}\cdot$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B|^2\, f(\bar{b}_1)\,..\,f(\bar{b}_n)\,db_1\,..\,db_n$$

$$= \frac{h}{2\sqrt{1-h^2}}\,\frac{n}{|\Omega_{n-1}|}\; g_1(h)^{n-1}$$

Setzt man (4.24) in (3.15) ein, so gilt also

Satz 3

Für die Dichtefunktion f(x) sei f(x) = 0 für $||x||>1$.

Dann gilt

$$(4.25)\qquad E_{\mathfrak{W}}(S) \geq \binom{m}{n}\frac{n^2}{4}\,\frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|}\int_0^1 G(h)^{m-n}\,g(h)^n\,g_1(h)^{n-1}\,\frac{h\,dh}{\sqrt{1-h^2}}$$

§5 Verallgemeinerung der Resultate

Wir wollen die Resultate der Paragraphen 3 und 4 so umformulieren, daß die Dichtefunktion f nicht mehr explizit auftritt. Die Resultate in dieser neuen Fassung lassen sich dann auch übertragen auf Fälle rotationssymmetrischer Verteilungen im $\mathbb{R}^n$, bei denen keine Dichtefunktion existiert.

Zu diesem Zweck sei durch

$$(5.1) \qquad \hat{f}(||x||) := f(x)$$

der rotationssymmetrischen Dichtefunktion die auf $[0,\infty)$ definierte Funktion $\tilde{f}$ zugeordnet, weiter sei

$$(5.2) \qquad \tilde{F}(r) := |\omega_n| \int_0^r n\, t^{n-1} \tilde{f}(t)\,dt \qquad (r>0).$$

Wir nennen $\tilde{F}$ im folgenden die "radiale Verteilungsfunktion" der rotationssymmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Offensichtlich gilt

(5.3) $\tilde{F}$ ist auf $(0,\infty)$ monoton wachsend, linksseitig stetig und $\lim_{r\to\infty} \tilde{F}(r) = 1$.

Für $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(5.4) \qquad r := ||x|| , \qquad \tilde{x} = \frac{x}{||x||}$$

und $d_\omega(\tilde{x})$ das durch die Forderung

$$(5.5) \qquad \int_{\omega_n} d_\omega(\tilde{x}) = 1$$

normierte (n-1)-dimensionale Oberflächenelement auf ω_n (in Bezug auf die auf S. 31 eingeführten Polarkoordinaten ist das dort angegebene Oberflächenelement also mit $\frac{1}{|\omega_n|}$ zu multiplizieren).

Der Erwartungswert $E_{\mathfrak{M}}(S)$ und die Funktionen $g(h), g_1(h), \Lambda_R(h), \Lambda_S(h)$ lassen sich - etwa unter Verwendung der Polarkoordinatendarstellung - auswerten zu

$$E_{\mathfrak{M}}(S) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \chi(r_1,\ldots,r_{m+2})\, d\tilde{F}(r_1)\ldots d\tilde{F}(r_{m+2}) \tag{5.6}$$

mit

$$\chi(r_1,\ldots,r_{m+2}) := \int_{\omega_n}\cdots\int_{\omega_n} S(\hat{A})\; d_\omega(\tilde{a}_1)\ldots d_\omega(\tilde{a}_{m+2}) \tag{5.7}$$

$$g(h) = \frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|} \int_h^\infty \frac{(r^2-h^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r^{n-2}}\, d\tilde{F}(r) \tag{5.8}$$

$$G(h) = \int_{-\infty}^{h} g(t)\,dt \tag{5.9}$$

$$g_1(h) = \frac{|\omega_{n-1}|}{(n-1)|\omega_n|}\,\frac{1}{g(h)} \int_h^\infty \frac{(r^2-h^2)^{\frac{n-1}{2}}}{r^{n-2}}\, d\tilde{F}(r) \tag{5.10}$$

$$\Lambda_S(h) = \frac{1}{g(h)^n} \int_h^\infty\cdots\int_h^\infty \chi_S(r_1,..,r_n,h)\, d\tilde{F}(r_1)..d\tilde{F}(r_n) \tag{5.11}$$

$$\Lambda_R(h) = \frac{1}{g(h)^n} \int_h^\infty\cdots\int_h^\infty \chi_R(r_1,..,r_n,h)\, d\tilde{F}(r_1)..d\tilde{F}(r_n) \tag{5.12}$$

mit

$$\chi_S(r_1,\ldots,r_n,h) = \left(\frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(r_i^2-h^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r_i^{n-2}} \cdot \tag{5.13}$$

$$\cdot \int_{\omega_{n-1}}\cdots\int_{\omega_{n-1}} |\det B|\; W(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_{n-1})\, d_\omega(b_1')..d_\omega(b_n')$$

$$(5.14)\qquad \tilde{\Lambda}_R(r_1,\ldots,h) = \left(\frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(r_i^2-h^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r_i^{n-2}} \cdot$$

$$\int_{\omega_{n-1}}\cdots\int_{\omega_{n-1}} |\det B| \; d_\omega,(b_1')\,..\,d_\omega,(b_n').$$

In (5.6-14) sei dabei

$a_{m+1} := u, \quad a_{m+2} := v$ und

$$r_i := \|\tilde{a}_i\| , \quad \tilde{a}_i := \frac{a_i}{||a_i||} \qquad i = 1,\ldots,m+2.$$

Der Integrand $S(\hat{A})$ ist dabei als Funktion der Größen

$r_1,\ldots,r_{m+2},\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_{m+2}$ aufzufassen.

Analog bedeute in (5.6-14)

$$r_i := ||\bar{b}_i||, \qquad b_i' := \frac{b_i}{||b_i||}$$ und $d_\omega,(b_i')$ sei das durch

$\int_{\omega_{n-1}} d_\omega,(b_i') = 1$ normierte Oberflächenelement auf ω_{n-1}.

Die Formeln (5.6-14) geben die Abhängigkeit der Größen $E_{m0}(S)$, g, G, g_1, Λ_S, Λ_R von der radialen Verteilungsfunktion wieder.

Es entsteht die Frage, unter welchen Voraussetzungen der Darstellungssatz (3.15) für $E_{m0}(S)$ (Satz 1) und die Abschätzungsformeln in Satz 2 und Satz 3 gültig bleiben, falls die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}^n$ durch eine radiale Verteilungsfunktion $\hat{F}(r)$ gegeben wird, die (5.3) genügt, und die in Satz 1 - 3 auftretenden Größen $E_{m0}(S), g, g_1, G, \Lambda_R, \Lambda_S$ durch (5.6-14) definiert werden.

Zur Untersuchung dieser Fragestellung ist es naheliegend, die Verteilungsfunktion $\hat{F}(r)$ z.B. in der Form

$$\hat{F}(r) = \lim_{n\to\infty} \hat{F}_n(r) \qquad r \in (0,\infty) \qquad \text{(5.15)}$$

als Grenzfunktion von absolutstetigen Verteilungsfunktionen $\hat{F}_n$ darzustellen, für die ja Satz 1, Satz 2, Satz 3 gültig sind. Aufgrund der wohlbekannten Resultate über Grenzprozesse bei Stieltjesintegralen (vgl. z.B. Natanson [30], S.261) kann man leicht hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit des Grenzprozesses mit der auftretenden Integration angeben.und auf diese Weise eine weitgehende Verallgemeinerung der Resultate aus den Sätzen 1,2,3 auf rotationssymmetrische Verteilungen allgemeiner Art erhalten. Wählt man als radiale Verteilungsfunktion speziell

$$\tilde{F}(r) = \begin{cases} 0 & 0<r\leq 1 \\ 1 & 1<r<\infty \end{cases} \qquad \text{(5.16)}$$

so erhält man die "Gleichverteilung auf ω_n". Die Auswertung der Funktionen (5.8),(5.9),(5.10) und (5.12) ergibt in diesem Fall:

$$g(h) = (1-h^2)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|} \qquad \text{(5.17)}$$

$$G(h) = \int_{-\infty}^{h} g(t)\, dt \qquad \text{(5.18)}$$

(5.19) $$g_1(h) = \frac{1-h^2}{n-1}$$

(5.20) $$\Lambda_R(h) = C\ (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}}, \qquad \text{wobei}$$

die explizite Integraldarstellung von C im folgenden nicht benutzt wird. Die Begründung für die Gültigkeit der Sätze 1,2,3 in diesem speziellen Fall ist ohne Mühe möglich und darf dem Leser überlassen bleiben.

Es sei noch ohne Beweis bemerkt, daß sich z.B. ein Darstellungsresultat analog zu Satz 1 auch herleiten läßt, wenn man die Voraussetzung (2.1) im folgenden Sinne abschwächt:

(5.21) Die Vektoren $a_1,\ldots,a_m,u,v \in \mathbb{R}^n$ sind kollektiv unabhängig und besitzen rotationssymmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen im $\mathbb{R}^n$.

Hierbei wird also darauf verzichtet, daß die auftretenden Vektoren alle die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Die Formulierung der Integraldarstellung wird allerdings erheblich komplizierter.

KAPITEL III

Das asymptotische Verhalten der mittleren Schrittzahlschranke für spezielle Verteilungen

§1 Die Gaußverteilung

In diesem Paragraphen soll die in Satz (I.1) angekündigte asymptotische Abschätzung für den Erwartungswert $E_1(S_{m,n})$ der Schrittzahlschranke hergeleitet werden. Der Erwartungswert bezieht sich dabei (vgl. I.3.3) auf die Gaußverteilung im $\mathbb{R}^n$ mit der Dichtefunktion

$$(1.1) \qquad f(x)=f(x^1,\ldots,x^n)=\pi^{-\frac{n}{2}}\, e^{-(x^1)^2-\ldots-(x^n)^2}.$$

Satz 1

Es gilt

$$(1.2) \qquad E_1(S_{m,n}) \leq \sqrt{\pi}\; n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\ln m}\; (1+\bar{\varepsilon}_1(m,n))$$

$$\text{mit} \quad \lim_{m\to\infty} \bar{\varepsilon}_1(m,n) = 0$$

Im Beweis des Satzes wird für die Funktion $\bar{\varepsilon}_1(m,n)$ eine (für $m \geq 8$ gültige) explizite Darstellung angegeben. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

Lemma 1

Aus der Definition (1.1) für die Dichtefunktion f(x) ergeben sich für die Funktionen g(h), $g_1(h)$, G(h), $\Lambda_R(h)$ (vgl. II 2.5, 4.11, 2.26) die folgenden Darstellungen:

$$(1.3) \qquad g(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, e^{-h^2}$$

$$(1.4) \qquad g_1(h) = \frac{1}{2}$$

$$(1.5) \qquad G(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{h} e^{-t^2} dt$$

$$(1.6) \qquad \Lambda_R(h) = \frac{1}{|\omega_n|} \, \pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n} \, 2 \, .$$

Beweis:

Die Formeln (1.3-5) für g(h), $g_1(h)$, G(h) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen (II,2.5) und (II.4.11), wenn man die Dichtefunktion f(x) nach (1.1) einsetzt.

Zur Herleitung von (1.6) setzen wir in

$$\Lambda_R(h) = \frac{1}{g(h)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B| \; f(\bar{b}_1) \cdot\cdot f(\bar{b}_n) \, db_1 \cdot\cdot db_n$$

$$f(\bar{b}_i) = f(b_i^1, \ldots, b_i^{n-1}, h) = f_1(b_i) e^{-h^2} \qquad \text{mit}$$

$$f_1(b_i) := \pi^{-\frac{n}{2}} \, e^{-(b_i^1)^2 - \ldots - (b_i^{n-1})^2} \, .$$

Dann folgt, daß

$$\Lambda_R(h) = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\det B| \; f_1(b_1) \cdot\cdot f_1(b_n) \, db_1 \cdot\cdot db_n$$

von h unabhängig ist.

Setzt man nun $C := \Lambda_R(h)$ in die Formel (II.2.27)

$$w_R = |\omega_n| \int_0^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_R(h)\, dh$$

ein und benutzt man, daß im Falle m=n $w_R=1$ wird, weil in diesem Falle jedes nicht entartete $\Sigma(a_1,\ldots,a_n)$ automatisch Randsimplex von $Y(\hat{A})$ ist, so erhält man für C die Bestimmungsgleichung

$$1 = |\omega_n| \int_0^\infty \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-nh^2} C \, dh$$

woraus sich die Behauptung (1.6)

$$\Lambda_R(h) = C = \frac{1}{|\omega_n|} \pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}\, 2$$

ergibt.

Setzt man die Darstellung der Funktionen g, g_1, G, $\Lambda_R(h)$ aus Lemma 1 in die Abschätzungsformel (II,4.19)

$$E_1(S_{m,n}) \leq \binom{m}{n} \frac{n}{2} |\omega_n| \int_0^q G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_R(h)\, dh$$

$$+ \binom{m}{n} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \int_q^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n g_1(h)^{n-\frac{3}{2}} \sqrt{g_1(h)+(n-1)h^2}\, \frac{1}{h^{n-1}} dh$$

ein und benutzt man, daß

$$(1.7) \qquad \sqrt{(n-1)h^2+\tfrac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\, h \qquad \text{für } 1 \leq q \leq h$$

so ergibt sich

$$(1.8) \qquad E_1(S_{m,n}) \leq n^{\frac{3}{2}} \binom{m}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_1 + n^2 \binom{m}{n} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} I_2$$

mit

$$I_1 := \int_0^q G(h)^{m-n} e^{-nh^2} dh \qquad \text{und}$$

$$I_2 := \int_q^\infty G(h)^{m-n} e^{-nh^2} \frac{dh}{h^{n-2}}$$

wobei q eine beliebige relle Zahl ≥ 1 sei.

Wir wollen nun zeigen, daß man mit Hilfe geeigneter Abschätzungen für I_1, I_2 zu den folgenden, von q abhängigen Schranken für $E_1(S_{m,n})$ gelangt:

Lemma 2

Für $q \geq 1$ und $m \geq n \geq 2$ gilt

$$(1.9) \qquad E_1(S_{m,n}) \leq n^{\frac{3}{2}} \binom{m}{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} q\, e^{-\frac{(m-n)e^{-q^2}}{8q}}$$

$$+ \frac{n}{\sqrt{2}} \left(1+\frac{1}{q^2}\right)^{n-1} \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \sqrt{\ln \frac{m}{n-1}}$$

Beweis:

Wir benötigen zum Beweis die folgenden Hilfsresultate

$$(1.10) \qquad G(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{h} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-h^2}}{2h\left(1+\frac{\Theta(h)}{h^2}\right)}$$

$$\text{mit} \quad 0 \leq \Theta(h) \leq 1 \quad \text{für } h \geq 0$$

$$(1.11) \qquad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1} \sqrt{\ln \frac{1}{t}}\, dt \leq \frac{1}{n} \sqrt{\ln \frac{m}{n-1}}$$

$$(1.12) \qquad \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \leq \sqrt{2\pi n} \qquad \text{für } n \geq 2$$

Zu (1.10) vergleiche man Renyi [34] S. 135.

(1.11) und (1.12) werden in Kapitel V § 2 bewiesen.

Da G(h) monoton wächst, folgt unter Benutzung von

$e^{-nh^2} \leq 1$

$$(1.13) \qquad I_1 = \int_0^q G(h)^{m-n} e^{-nh^2}\, dh \leq q \cdot G(q)^{m-n} .$$

Wegen $q \geq 1$ ist $\sqrt{\pi}\ 2\left(1+\frac{\Theta(q)}{q^2}\right) \leq \sqrt{\pi}\ 4 \leq 8$

und daher

$$(1.14) \qquad G(q) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-q^2}}{2q\left(1+\frac{\Theta(q)}{q^2}\right)} \leq 1 - \frac{e^{-q^2}}{8q} \leq e^{-\frac{e^{-q^2}}{8q}}$$

aufgrund der Abschätzung $1-t \leq e^{-t}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Aus (1.13),(1.14) ergibt sich daher

$$(1.15) \qquad I_1 \leq q\, e^{-\frac{(m-n)e^{-q^2}}{8q}} .$$

Der erste Summand in (1.8) kann also durch den ersten Summanden in (1.9) abgeschätzt werden.

Zur Abschätzung von I_2 führen wir

$$(1.16) \qquad t := 1 - G(h)$$

als neue Integrationsvariable ein.

Beachtet man, daß aufgrund von (1.10)

$$(1.17) \qquad t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-h^2}}{2h\left(1+\frac{\Theta(h)}{h^2}\right)}$$

gilt, so erhält man für $h \geq q$

$$(1.18)\qquad \frac{e^{-h^2}}{h} = 2\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\Theta(h)}{h^2}\right)\cdot t \leq 2\sqrt{\pi}\left(1+\frac{1}{q^2}\right)t$$

Wegen $h2\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\Theta(h)}{h^2}\right) \geq 1$ für $h \geq 1$ folgt aus (1.17) weiter, daß für $h \geq 1$ die Ungleichung $e^{-h^2} \geq t$ gilt. Hieraus folgt

$$(1.19)\qquad h \leq \sqrt{\ln \frac{1}{t}} \qquad \text{für} \quad h \geq 1 .$$

Also gilt wegen $dt = -g(h)dh = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2} dh$

mit (1.16),(1.19)

$$(1.20)\qquad I_2 = \int_q^\infty G(h)^{m-n} \left(\frac{e^{-h^2}}{h}\right)^{n-1} \cdot h\, e^{-h^2}\, dh$$

$$\leq 2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{q^2}\right)^{n-1} \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt$$

und daher nach (1.11)

$$(1.21)\qquad I_2 \leq 2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{1}{q^2}\right)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{\ln \frac{m}{n-1}} \quad \frac{1}{\binom{m}{n}} .$$

Setzt man diese Schranke für I_2 in den zweiten Summanden von (1.8) ein, so erhält man den zweiten Summanden in (1.9).

Beweis von Satz 1:

Es soll gezeigt werden, daß man aus Lemma 2 die Aussage von Satz 1 erhält, wenn man für den noch freien Parameter q

$$(1.22)\qquad q(m) := \sqrt{\frac{1}{2} \ln m}$$

einsetzt.

Die Voraussetzung $q(m) \geq 1$ ist erfüllt für

(1.23) $$m \geq 8 > e^2 .$$

Diese Voraussetzung spielt für unsere asymptotischen Aussagen keine Rolle. Wir benutzen, daß (man beachte (1.12))

(1.24) $$\sqrt{\ln \frac{m}{n-1}} \leq \sqrt{\ln m} \quad , \quad \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \leq \sqrt{2\pi n} \quad ,$$

$$\binom{m}{n} \leq \frac{m^n}{n!}$$

und erhalten so aus (1.9) für $m \geq 8$ die Abschätzung

(1.25) $$E_1(S) \leq n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\ln m} \; (1 + \bar{\varepsilon}_1(m,n))$$

mit

(1.26) $$\bar{\varepsilon}_1(m,n) = \frac{1}{n!} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}} \; m^n \, e^{-\frac{m-n}{\sqrt{m}\, 8\sqrt{\frac{1}{2} \ln m}}} + \left(e^{\frac{2(n-1)}{\ln m}} - 1 \right) .$$

Hierbei wurde benutzt, daß $1 + \frac{1}{q(m)^2} \leq e^{\frac{1}{q(m)^2}}$,

also $\left(1 + \frac{1}{q(m)^2}\right)^{n-1} \leq e^{\frac{2(n-1)}{\ln m}}$.

Aus der Darstellung (1.26) folgt unmittelbar, daß $\lim_{m \to \infty} \bar{\varepsilon}_i(m,n) = 0$.

Es sei darauf hingewiesen, daß die explizite Kenntnis von $\Lambda_R(h)$ (vergl.(1.6)) aufgrund der Formel (II.2.27) für w_R relativ leicht das asymptotische Verhalten von w_R und damit auch des Erwartungswertes für die Eckenanzahl von X anzugeben gestattet. Man erhält bei Verwendung unserer Beweismethoden eine neue Herleitung der Resultate von Raynaud [33] für die dort untersuchten Fälle i = 1,2. Wir können diese Resultate insofern verschärfen, als unsere Methode explizite Schranken für die Erwartungswerte liefert.

§2 Gleichverteilung auf Ω_n und auf ω_n

In ähnlicher Weise wie in §1 sollen jetzt Abschätzungen für die Erwartungswerte $E_2(S_{m,n}), E_3(S_{m,n})$ hergeleitet werden, die man erhält, wenn man die Gleichverteilung auf der Vollkugel Ω_n bzw. die Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche ω_n als Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem $\mathbb{R}^n$ zugrundelegt. Wir betrachten also für $E_2(S_{m,n})$ die Dichtefunktion der

(2.1) Gleichverteilung auf Ω_n:

$$f(x)=f(x^1,..,x^n)=\begin{cases}\frac{1}{|\Omega_n|} & x \in \Omega_n \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

während die Gleichverteilung auf ω_n für unsere Zwecke am günstigsten durch die radiale Verteilungsfunktion $\tilde{F}(r)$ beschrieben wird

(2.2) Gleichverteilung auf ω_n:

$$\tilde{F}(r):=\begin{cases}1 & r > 1 \\ 0 & 0< r \leq 1\end{cases}$$

Wir untersuchen in diesem Paragraphen nur die Fälle $n \geq 3$. Die an sich besonders einfachen Überlegungen für $n = 2$ werden ausgelassen, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

Der folgende Satz gibt das asymptotische Verhalten von $E_i(S_{m,n})$ für i = 2,3 an, wobei durch die Herleitung unterer Schranken nachgewiesen wird, daß die Größenordnung der Asymptotik in m nicht weiter verbessert werden kann.

Satz 2

Für die Erwartungswerte der Schrittzahlschranke in den Fällen der Gleichverteilung auf Ω_n (i = 2) und der Gleichverteilung auf ω_n (i = 3) gilt bei $n \geq 3$:

$$(2.3) \qquad E_i(S_{m,n}) \leq n^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \; m^{\frac{1}{n_i}} \; (1 + \bar{\varepsilon}_i(m,n)) \quad i=2,3$$

wobei

$$n_2 := n+1, \quad n_3 := n-1 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\varepsilon}_i(m,n) = 0$$

$$(2.4) \qquad E_i(S_{m,n}) \geq n^{\frac{3}{2}} \; m^{\frac{1}{n_i}} \; \underline{C} \; (1 - \underline{\varepsilon}(m,n)) \quad i=2,3$$

mit

$$\underline{C} > 0 \qquad \text{und}$$

$$\lim_{m\to\infty} \underline{\varepsilon}(m,n) = 0 \; .$$

Anmerkung: Dieser Satz gilt auch bei n=2, er wird hier aber nur für $n \geq 3$ bewiesen.

Wir stellen zunächst die Funktionen g, g_1, G, Λ_R zusammen, die sich aufgrund der Verteilungen nach (2.1), (2.2) aus den Formeln (II 2.5, 4.11, 2.26) berechnen.

Lemma 3

Bei Gleichverteilung auf Ω_n gilt für $n \geq 3$

$$(2.5) \qquad g(h) = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{|\Omega_{n-1}|}{|\Omega_n|}$$

$$(2,6) \qquad g_1(h) = \frac{1-h^2}{n+1}$$

$$(2.7) \qquad G(h) = \int_{-\infty}^{h} g(t)\, dt$$

$$(2.8) \qquad \Lambda_R(h) = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot A_2(n)$$

mit $$A_2(n) = \frac{\Gamma(\frac{n^2+2}{2})2}{\Gamma(\frac{n^2+1}{2})\sqrt{\pi}|\omega_n|} \left(\frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n-1}|}\right)^n$$

und bei Gleichverteilung auf ω_n $(n \geq 3)$

$$(2.9) \qquad g(h) = (1-h^2)^{\frac{n-3}{2}} \frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|}$$

$$(2.10) \qquad g_1(h) = \frac{1-h^2}{n-1}$$

$$(2.11) \qquad G(h) = \int_{-\infty}^{h} g(t)\, dt$$

$$(2.12) \qquad \Lambda_R(h) = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot A_3(n)$$

mit $$A_3(n) = \frac{\Gamma(\frac{n^2-2n+2}{2})2}{\Gamma(\frac{n^2-2n+1}{2})\sqrt{\pi}|\omega_n|} \left(\frac{|\omega_n|}{|\omega_{n-1}|}\right)^n$$

Beweis:

Die angegebenen Formeln für g, g_1, G ergeben sich bei Gleichverteilung auf Ω_n unmittelbar, wenn man die Funktion f aus (2.1) in die Darstellungen (II 2.5,4.11) einsetzt. Entsprechend erhält man mit Hilfe der radialen Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ nach (2.2) die Formeln (2.9-11) aufgrund der Darstellungen (II.5.6-14).

Die Herleitung der Formel für $\Lambda_R(h)$ soll zunächst für die Gleichverteilung auf Ω_n durchgeführt werden. Wir zeigen hierzu in einem ersten Schritt, daß $\Lambda_R(h)$ von der Gestalt

$$\Lambda_R(h) = C \ (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.13}$$

ist. Geht man mit (2.13) in die Darstellung (II.2.27)

$$w_R = |\omega_n| \int_0^\infty G(h)^{m-n} g(h)^n \Lambda_R(h)\, dh$$

und benutzt man - wie in §1 - daß $w_R = 1$ für m=n ist, so erhält man zur Bestimmung von C die Gleichung

$$1 = |\omega_n| \ C \int_0^1 g(h)^n (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dh \tag{2.14}$$

Setzt man g(h) aus (2.5) ein und substituiert man $h = \cos\psi$, so folgt

$$\frac{1}{C} = |\omega_n| \left(\frac{|\Omega_{n-1}|}{|\Omega_n|}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n^2}\psi \, d\psi \tag{2.15}$$

$$= |\omega_n| \left(\frac{|\Omega_{n-1}|}{|\Omega_n|}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n^2+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n^2+2}{2}\right)2}$$

aufgrund von (vgl. Bronstein [3] ,S. 351)

$$(2.16)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k\psi d\psi = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\ 2}$$

und damit die Behauptung (2.8).

Um zu beweisen, daß $\Lambda_R(h)$ die Gestalt (2.13) besitzt, gehen wir von der Darstellung

$$(2.17)\qquad \Lambda_R(h) = \frac{1}{g(h)^n} \int_{\Omega_{n-1}(\sqrt{1-h^2})} \cdots \int_{\Omega_{n-1}(\sqrt{1-h^2})} |\det B|\, db_1..db_n$$

aus, die sich aus (II.2.26) aufgrund der Dichtefunktion f aus (2.1) ergibt. Hierbei bedeute

$$(2.18)\qquad \Omega_{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1},\ ||x|| \leq r\}$$

Führen wir die Vektoren $\hat{b}_i := \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\, b_i$ ein und setzen

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1^1 & \cdots & \hat{b}_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{b}_n^1 & \cdots & \hat{b}_n^{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

so gilt

$$\det B = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \det \hat{B}$$

und (2.17) geht wegen $db_i = (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\hat{b}_i$ über in

$$(2.19)\quad \Lambda_R(h) = \frac{1}{g(h)^n}(1-h^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\Omega_{n-1}} \cdots \int_{\Omega_{n-1}} |\det \hat{B}|\, d\hat{b}_1..d\hat{b}_n$$

Da $\frac{1}{g(h)^n}(1-h^2)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ nach (2.5) genau wie das Integral

im letzten Faktor von h unabhängig ist, ergibt sich für $\Lambda_R(h)$ die behauptete Form der Darstellung.

Man kann in analoger Weise herleiten, daß eine Darstellung der Gestalt (2.13) für $\Lambda_R(h)$ auch im Falle der Gleichverteilung auf ω_n gilt. Geht man mit diesem Ansatz mit g(h) nach (2.9) in (II.2.27), so ergibt sich die Darstellung (2.12).

Setzt man die Darstellungen für g, g_1, G, Λ_R von Lemma 3 in die Abschätzungen für $E_i(S_{m,n})$ in (II.4.19,II.4.25) ein, so erhält man

$$(2.20) \qquad E_i(S_{m,n}) \leq B_i(n)\, I_1^{(i)} + C_i(n)\, I_2^{(i)}$$

$$(2.21) \qquad E_i(S_{m,n}) \geq D_i(n)\, I_3^{(i)}$$

mit

$$(2.22) \qquad I_1^{(i)} := \binom{m}{n} \int_0^q G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{k_i}{2}}\, dh$$

$$(2.23) \qquad I_2^{(i)} := \binom{m}{n} \int_0^1 G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{l_i}{2}}\, dh \;\; \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$(2.24) \qquad I_3^{(i)} := \binom{m}{n} \int_0^1 G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{l_i}{2}}\, h\, dh$$

und

$$(2.25) \qquad k_2 := n^2 - 1, \qquad k_3 := n^2 - 2n - 1$$
$$l_2 := n^2 + n - 3, \qquad l_3 := n^2 - n - 3$$

$$(2.26) \qquad B_2(n) = B_3(n) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$$

$$(2.27)\qquad C_2(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; n^2\; \sqrt{n-1}\left(\frac{|\Omega_{n-1}|}{|\Omega_n|}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n-\frac{3}{2}}$$

$$C_3(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; n^2\; \sqrt{n-1}\left(\frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|}\right)^n \left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-\frac{3}{2}}$$

$$(2.28)\qquad D_2(n) = n^{\frac{5}{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n-1}\left(\frac{|\Omega_{n-1}|}{|\Omega_n|}\right)^n$$

$$D_3(n) = n^{\frac{5}{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{|\omega_{n-1}|}{|\omega_n|}\right)^n$$

Zur Unterscheidung wurde dabei für G nach (2.7) bzw. (2.11) G_2 bzw. G_3 geschrieben.

Weiter wurde in (2.20) benutzt, daß

$$(2.29)\qquad \int_q^1 G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{1_i}{2}}\,\frac{dh}{h^{n-1}} \leq \int_0^1 G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{1_i}{2}}dh\;\frac{1}{q^{n-1}}$$

Zur Herleitung des ersten Summanden von (2.20) verwenden wir die auf der Konvexität von $\ln\Gamma(t)$ (vgl.[6] S.291) beruhende Abschätzung

$$(2.30)\qquad \frac{\Gamma(t+\frac{1}{2})}{\Gamma(t)} \leq \sqrt{t} \qquad \text{für } t \geq 0$$

und erhalten damit

$$\frac{\Gamma(\frac{n^2+2}{2})}{\Gamma(\frac{n^2+1}{2})} \leq \sqrt{\frac{n^2+1}{2}}\,, \qquad \frac{\Gamma(\frac{n^2-2n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n^2-2n+1}{2})} \leq \sqrt{\frac{n^2-2n+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$$

Für die Herleitung der Schrankenfaktoren $C_i(n)$, $D_i(n)$ wurde Gebrauch gemacht von (vgl. V.2.9)

$$(2.31)\qquad \sqrt{\pi n} \leq \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \leq \sqrt{2\pi n} \qquad \text{für } n \geq 2$$

und von $\sqrt{g_1(h)+(n-1)h^2} \leq \sqrt{n-1}$.

Auf S. 71-75 werden für die Integrale $I_j^{(i)}$ die folgenden Schranken hergeleitet:

Hilfssatz 1

$$(2.32) \qquad I_1^{(i)} \leq \binom{m}{n} \; e^{-n_i^{-1}(m-n)(1-q)^2 \pi^{-1}}$$

$$(2.33) \qquad I_2^{(i)} \leq \tilde{C}_i(n) \; m^{\frac{1}{n_i}} \; \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$(2.34) \qquad I_3^{(i)} \geq \tilde{D}_i(n) \; m^{\frac{1}{n_i}} \; (1 - \varepsilon_i(m,n))$$

$$\text{mit} \quad \lim_{m\to\infty} \varepsilon_i(m,n) = 0 \quad \text{und}$$

$$(2.35) \qquad \tilde{C}_2(n) = \left(\frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n-1}|}\right)^n \; (n+1)^{n-1} \; \frac{1}{n!}$$

$$\tilde{C}_3(n) = \left(\frac{|\omega_n|}{|\omega_{n-1}|}\right)^n \; (n-1)^{n-1} \; \frac{1}{n}$$

$$(2.36) \qquad \tilde{D}_i(n) = \tilde{C}_i(n) \; \tilde{D}, \qquad \tilde{D} > 0.$$

Benutzt man, daß nach (2.27), (2.28), (2.35), (2.36)

$$(2.37) \qquad D_i(n)\tilde{D}_i(n) \geq n^{\frac{3}{2}} \; \tilde{D} \; \frac{1}{4} \; \sqrt{\pi}.$$

so folgt aus (2.21), (2.37), daß

$$(2.38) \qquad E_i(S_{m,n}) \geq n^{\frac{3}{2}} \; \underline{C} \; (1 - \underline{\varepsilon}(m,n))$$

$$\text{mit} \quad \underline{C} := \tilde{D} \; \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

und damit der Teil (2.4) des Satzes.

Aus (2.20),(2.26-27) und (2.32-33) folgen die von q abhängigen Schranken für $E_i(S_{m,n})$:

Lemma 4

$$(2.39)\qquad E_i(S_{m,n}) \leq n\sqrt{n^2+1}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\binom{m}{n}\, e^{-n_i^{-1}(m-n)(1-q)^{\frac{n_i}{2}\pi-1}} + n^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\; m^{\frac{1}{n_i}}\; \frac{1}{q^{n-1}}$$

Im ersten Summanden wurde (2.30) benutzt, während für den zweiten Summanden Gebrauch gemacht wurde von

$$(2.40)\qquad C_i(n)\tilde{C}_i(n) \leq n^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ .$$

Die noch ausstehenden Beweise für die Abschätzungen (2.3) des Satzes ergeben sich aus (2.39), wenn man für den noch frei wählbaren Parameter

$q = q(m,n) = 1 - m^{\frac{-1}{n_i}}$ einsetzt. Dann läßt sich die rechte Seite von (2.39) in folgender Form schreiben:

$$(2.41)\qquad n^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\; m^{\frac{1}{n_i}}\; (1+\bar{\varepsilon}_i(m,n)) \quad \text{mit}$$

$$(2.42)\quad \bar{\varepsilon}_i(m,n) = \frac{1}{\pi n}\sqrt{n^2+1}\,\frac{m^n}{n!}\, e^{-n_i^{-1}(m-n)\frac{1}{\sqrt{m}}\pi^{-1}}\; m^{\frac{-1}{n_i}} + \left(1- m^{\frac{-1}{n_i}}\right)^{-n+1} - 1$$

Analog wie bei der Gaußverteilung erkennt man, daß

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\varepsilon}_i(m,n) = 0.$$

Beweis von Hilfssatz 1

Wir führen zur Abkürzung die Bezeichnung

$$(2.43) \qquad E(k) := \left(\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{k-2}{2}} \, dt \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}) \sqrt{\pi}}$$

ein und werden im folgenden von der Einschließung

$$(2.44) \qquad \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \leq E(k)^{-1} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{k-1}} \qquad (k \geq 2)$$

Gebrauch machen, die im Kapitel V bewiesen wird. Dann lassen sich die Funktionen $G_i(h)$ in der Form

$$(2.45) \qquad G_i(h) = E(n_i) \int_{-1}^{h} (1-t^2)^{\frac{n_i-2}{2}} \, dt \qquad i=2,3$$

mit $n_2=n+1$, $n_3=n-1$ schreiben, wobei

$$(2.46) \qquad E(n_2)^{-1} = \frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \quad , \quad E(n_3)^{-1} = \frac{|\omega_n|}{|\omega_{n-1}|}$$

gilt, wie man erkennt, wenn mah von $G_i(1.)=1$ Gebrauch macht (vgl. Courant [6]).

Aus (2.45) ergibt sich

$$(2.47) \qquad 1 - G_i(h) = E(n_i) \int_{h}^{1} (1-t^2)^{\frac{n_i-2}{2}} \, dt$$

und mit

$$\int_{h}^{1} (1-t^2)^{\frac{n_i-2}{2}} \, dt \geq \int_{h}^{1} (1-t^2)^{\frac{n_i-2}{2}} \, t \, dt = \frac{1}{n_i} (1-h^2)^{\frac{n_i}{2}}$$

folgt mit $\frac{E(n_i)}{n_i} \geq n_i^{-1}\,\pi^{-1}$ nach (2.44):

$$(2.48)\qquad 1-G_i(h) \geq \frac{E(n_i)}{n_i}(1-h^2)^{\frac{n_i}{2}} \geq n_i^{\frac{-1}{2}}(1-h)^{\frac{n_i}{2}}$$

Wegen der Monotonie der $G_i(h)$ und mit $(1-h^2)^{\frac{n_i}{2}} \leq 1$ folgt aus (2.48)

$$(2.49)\qquad I_1^{(i)} = \binom{m}{n}\int_0^q G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{n_i}{2}}\,dh$$

$$\leq \binom{m}{n}\,G_i(q)^{m-n} \leq \binom{m}{n}\left(1-n_i^{-1}(1-q)^{\frac{n_i}{2}}\pi^{-1}\right)^{m-n}$$

$$\leq \frac{m^n}{n!}\,e^{-n_i^{-1}(m-n)(1-q)^{\frac{n_i}{2}}\pi^{-1}}$$

und damit die Ungleichung (2.32) des Hilfssatzes.

Zur Auswertung der Integrale $I_2^{(i)}, I_3^{(i)}$ führen wir die neue Integrationsvariable

$$(2.50)\qquad t = 1-G_i(h)$$

ein und entnehmen aus (2.48)

$$(2.51)\qquad (1-h^2) \leq \hat{E}(n_i)\,t^{\frac{2}{n_i}} \quad \text{mit}$$

$$(2.52)\qquad \hat{E}(n_i) := \left(\frac{n_i}{E(n_i)}\right)^{\frac{2}{n_i}}, \quad \text{wobei}$$

$$(2.53)\qquad \hat{E}(n_i) \geq 1 \quad \text{und} \quad \hat{E} := \sqrt{\sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq 2}} \hat{E}(k)} < \infty$$

Also gilt, mit $dt = -E(n_i)(1-h^2)^{\frac{n_i-2}{2}} dh$,

$$(2.54) \qquad I_2^{(i)} = \binom{m}{n} \int_0^1 G_i(h)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{l_i}{2}} dh$$

$$= \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n}(1-h^2)^{\frac{\tilde{l}_i}{2}} dt \; \frac{1}{E(n_i)}$$

$$\leq \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1-\frac{1}{n_i}} dt \; \hat{E}(n_i)^{\frac{1}{2}\tilde{l}_i} \; \frac{1}{E(n_i)}$$

mit $\tilde{l}_i := l_i - n_i + 2$, $\quad \frac{\tilde{l}_i}{n_i} = n - 1 - \frac{1}{n_i} \qquad i=2,3$

Im Anhang werden die folgenden Abschätzungen bewiesen:

$$(2.55) \qquad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1-\frac{1}{n_i}} dt \leq \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n-2}\right)^{\frac{1}{n_i}} \qquad \text{für } n \geq 3$$

$$(2.56) \qquad \binom{m}{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{m-n} t^{n-1-\frac{1}{n_i}} (1-(\tilde{l}_i+1)\hat{E}(n_i) t^{\frac{2}{n_i}}) dt$$

$$\geq \frac{1}{n} m^{\frac{1}{n_i}} (n-1)^{\frac{-1}{n_i}} (1 - \varepsilon_i(m,n))$$

$$\text{mit} \quad \lim_{m\to\infty} \varepsilon_i(m,n) = 0.$$

Mit (2.55) ergibt sich aus (2.54)

$$(2.57) \qquad I_2^{(i)} \leq \tilde{C}_i(n) \; m^{\frac{1}{n_i}} \left(\frac{E(n_i)}{n_i(n-2)}\right)^{\frac{1}{n_i}} \leq \tilde{C}_i(n) \; m^{\frac{1}{n_i}}$$

und damit die Behauptung (2.33) des Hilfssatzes.

Zur Herleitung der Abschätzung für $I_3^{(i)}$ zeigen wir zunächst, daß aus (2.47) folgt:

$$(2.58) \qquad 1 - h^2 \geq \hat{E}(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}} \left(1 - \hat{E}(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}}\right)$$

Wir betrachten die Funktionen auf der linken und der rechten Seite der Ungleichung als Funktionen von h, die mit $\phi(h)$, $\psi(h)$ bezeichnet werden.

Dann gilt

$$(2.59) \qquad \phi'(h) \leq \psi'(h) \quad \text{für } 0 \leq h \leq 1 \quad \text{und } \phi(1)=\psi(1)=0$$

wegen

$$(2.60) \qquad -\psi'(h) = \hat{E}(n_i)\frac{2}{n_i}\, t^{\frac{2-n_i}{n_i}} \left(1 - 2\hat{E}(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}}\right) E(n_i)\,(1-h^2)^{\frac{n_i-2}{2}}$$

$$\leq 2(1-(1-h^2)) = 2h^2 \leq 2h = -\phi'(h)$$

Hierbei wurde benutzt, daß $\frac{dt}{dh} = -E(n_i)(1-h^2)^{\frac{n_i-2}{2}}$ und

$$t^{\frac{2-n_i}{n_i}} (1-h^2)^{\frac{n_i-2}{2}} \leq \frac{n_i}{E(n_i)} \cdot \frac{1}{\hat{E}(n_i)}$$

sowie $2\,\hat{E}(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}} \geq 1-h^2$ nach (2.51).

Aus (2.59) folgt aber $\Phi(h) \geq \psi(h)$, dh. (2.58).

Aus dieser Herleitung ergibt sich, daß nach (2.51)

$$(2.61) \qquad h \geq 1 - \hat{E}(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}} \qquad \text{und}$$

$$(2.62) \quad (1-h^2)^{\frac{\tilde{l}_i}{2}}\, h \geq \left(\frac{t\, n_i}{E(n_i)}\right)^{\frac{\tilde{l}_i}{n_i}} \left(\text{Max}\,\{0,\ 1 - E(n_i)\, t^{\frac{2}{n_i}}\}\right)^{\tilde{l}_i+1}$$

$$\geq \left(\frac{n_i}{E(n_i)}\right)^{n-1} \hat{E}(n_i)^{\frac{-1}{2}}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}} (1-\hat{E}(n_i)\,(\tilde{l}_i+1)\, t^{\frac{2}{n_i}})$$

und damit

$$(2.63) \quad I_3^{(i)} = \binom{m}{n} \frac{1}{E(n_i)} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{m-n} (1-h^2)^{\frac{\tilde{l}_i}{2}}\, h\, dt$$

$$\geq \binom{m}{n} \left(\frac{n_i}{E(n_i)}\right)^{n-1} \frac{1}{E(n_i)}\, \hat{E}(n_i)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{m-n}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}} (1-\hat{E}(n_i)\,(\tilde{l}_i+1)\, t^{\frac{2}{n_i}})\, dt$$

$$\geq \left(\frac{n_i}{E(n_i)}\right)^{n-1} \frac{1}{E(n_i)}\, \frac{1}{n}\, \frac{1}{\hat{E}}\, m^{\frac{1}{n_i}}\, (n-1)^{\frac{\tilde{+}1}{n_i}}\, (1 - \varepsilon_i(m,n))$$

$$= \tilde{C}_i(n)\, \frac{1}{\hat{E}}\, m^{\frac{1}{n_i}}\, (n-1)^{\frac{-1}{n_i}}\, (1 - \varepsilon_i(m,n))$$

mit $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_i(m,n) = 0$

und daraus (2.34) mit $\hat{F} := \sup_{k\geq 3} (k-1)^{\frac{1}{k-1}} < \infty$

und $\tilde{D} := \frac{1}{\hat{E}}\, \frac{1}{\hat{F}}$.

KAPITEL IV

Vergleich der Theorie mit numerischen Experimenten

§1 Numerische Realisierung des theoretischen Simplexalgorithmus

Zur Durchführung numerischer Experimente wurden die Eingabedaten des Problems durch Zufallsgeneratoren erzeugt, die die jeweiligen Annahmen über die zugrundeliegenden Verteilungen im $\mathbb{R}^n$ simulieren. Die Bestimmung der Startecke x_{Δ^o} bzw. eines Startsimplex $\Sigma(\Delta^o)$ (falls ein solches existiert) entspricht der Lösung einer modifizierten Optimierungsaufgabe vom Typ (I.1.1) mit der Optimierungsfunktion $Q_1(x) = u^T x$ anstelle von $Q(x)$. Da der Aufwand für die Bestimmung von Δ^o bei unserer Aufwandsbetrachtung außer ächt gelassen wurde, soll hier auf die Realisierung dieses Teils des Verfahrens nicht eingegangen werden, zumal die Festlegung der Startecke durch die Vorgabe von u hier nur aus theoretischen Gründen gewählt wurde. Jeder Standardalgorithmus der linearen Optimierung kann zur Bestimmung von Δ^o herangezogen werden.

Im folgenden sollen die wohlbekannten Standardüberlegungen für die"Tableaumethode" im Zusammenhang mit linearer Optimierung in einer für unsere Zwecke geeigneten Form kurz skizziert werden, wobei auf eine ausführliche Herleitung der Aussagen verzichtet werden kann. Hieran anschließend soll angegeben werden, in welcher Weise das übliche

Tableauverfahren modifiziert wird, um zu einer Realisierung unseres theoretischen Simplexalgorithmus zu gelangen. Aus Platzgründen wird hierbei die Nichtentartung der Matrix $\hat{A}$ vorausgesetzt. Die Berücksichtigung der Entartungsfälle ist durch die üblichen Zusatzüberlegungen ohne Mühe möglich.

Eine Matrix $\hat{A}$ (vgl. (II.1.4) erfülle die Voraussetzung über Nichtentartung (II.1.5). Es sei $\Delta \in \vartheta$. Dann bilden die Vektoren (a_k) $(k \in \Delta)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und es existieren eindeutig bestimmte Darstellungen

$$(1.1) \qquad a_i = \sum_{k \in \Delta} \gamma_{ki} a_k \quad (i \notin \Delta), \quad v = \sum_{k \in \Delta} \alpha_k a_k \;, \quad u = \sum_{k \in \Delta} \beta_k a_k$$

Die auftretenden Indizes bezeichnen dabei stets Elemente der Menge $\{1,\ldots,m\}$, ohne daß dies jedesmal angegeben wird.

Wir führen weiter die Größen

$$(1.2) \qquad t_i := 1 - \sum_{k \in \Delta} \gamma_{ki} \quad (i \notin \Delta) \;, \quad t := 1 - \sum_{k \in \Delta} \alpha_k$$

ein. Dann gilt (man beachte I.1.3)

$$(1.3) \qquad Q(x_\Delta) = 1 - t$$

(1.4) $\Delta \in \vartheta_R$ (dh. x_Δ ist Ecke von X bzw. $\Sigma(\Delta)$ ist Randsimplex von Y) gilt genau dann, wenn

$t_i \geq 0$ $(i \notin \Delta)$.

(1.5) x_Δ ist Startecke genau dann, wenn $\beta_k \geq 0$ $(k \in \Delta)$.

Es sei darauf hingewiesen, daß aus der Nichtentartungsvoraussetzung unmittelbar folgt, daß die γ_{ki} ($k \in \Delta$, $i \notin \Delta$), α_k, β_k, t_k ($k \in \Delta$) alle $\neq 0$ sind.

Sei nun $\Delta \in \vartheta_R$. Für die Diskussion von Simplexalgorithmen ist es wichtig, die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

(1.6a) x_Δ ist Optimalecke

(1.6b) x_Δ ist keine Optimalecke, aber es existiert kein benachbartes $\Delta' \in \vartheta_R$ mit $Q(x_{\Delta'}) > Q(x_\Delta)$.

(1.6c) Es existiert ein benachbartes $\Delta' \in \vartheta_R$ mit $Q(x_{\Delta'}) > Q(x_\Delta)$.

Es gilt:

(1.7) x_Δ ist Optimalecke genau dann, wenn $\alpha_k \geq 0$ ($k \in \Delta$).

(1.8) Der Fall (1.6b) liegt genau dann vor, falls für alle Werte $k_o \in \Delta$ mit $\alpha_{k_o} < 0$ jeweils $\gamma_{k_o i} \geq 0$ für alle $i \notin \Delta$ gilt.

(1.9) Der Fall (1.6c) liegt genau dann vor, falls es ein $k_o \in \Delta$ mit $\alpha_{k_o} < 0$ und mindestens ein $i_o \notin \Delta$ mit $\gamma_{k_o i_o} < 0$ gibt.

Zum Beweis sei $\Delta' \in \vartheta$ zu Δ benachbart. Δ' entstehe aus Δ dadurch, daß ein k_o aus Δ entfernt und das Element $i_o \notin \Delta$ hinzugefügt wird

(1.10) $\Delta' := \{\Delta - \{k_o\}\} \cup \{i_o\}$.

Dann folgen aus (1.1) neue Darstellungen

(1.11) $a_i = \sum_{k \in \Delta'} \gamma'_{ki} a_k \quad (i \notin \Delta')$, $v = \sum_{k \in \Delta'} \alpha'_k a_k$, $u = \sum_{k \in \Delta'} \beta'_k a_k$

und

(1.12) $t'_i := 1 - \sum_{k \in \Delta'} \gamma'_{ki} \quad (i \notin \Delta')$, $t' := 1 - \sum_{k \in \Delta'} \alpha'_k$

mit

(1.13) $$\gamma'_{ki} = \gamma_{ki} - \frac{\gamma_{k_o i}\, \gamma_{k i_o}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

$$\gamma'_{i_o i} = \frac{\gamma_{k_o i}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

$$\gamma'_{k k_o} = - \frac{\gamma_{k i_o}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

$$\gamma'_{i_o k_o} = \frac{1}{\gamma_{k_o i_o}}$$

(1.14) $$\alpha'_k = \alpha_k - \frac{\gamma_{k i_o}}{\gamma_{k_o i_o}} \alpha_{k_o}, \qquad \alpha'_{i_o} = \frac{\alpha_{k_o}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

(1.15) $$\beta'_k = \beta_k - \frac{\gamma_{k i_o}}{\gamma_{k_o i_o}} \beta_{k_o}, \qquad \beta'_{i_o} = \frac{\beta_{k_o}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

(1.16) $$t'_i = t_i - t_{i_o} \frac{\gamma_{k_o i}}{\gamma_{k_o i_o}}$$

$$t'_{k_o} = - t_{i_o} \frac{1}{\gamma_{k_o i_o}}$$

wobei jeweils $k \in \Delta'$, $k \neq i_o$, $i \notin \Delta'$, $i \neq k_o$.

Aufgrund dieser "Austauschformeln" ergibt sich die Charakterisierung der Fälle (1.6a-c) in bekannter Weise. Gibt es ein $k_o \in \Delta$ mit $\alpha_{k_o} < 0$ und $\gamma_{k_o i} \geq 0$ für alle $i \notin \Delta$, so ist $Q(x)$ auf X nach oben unbeschränkt. Liegt der Fall (1.6c) vor, so kann man zu jedem $k_o \in \Delta$ mit $\alpha_{k_o} < 0$, zu dem es ein $i_o \notin \Delta$ mit $\gamma_{k_o i_o} < 0$ gibt, unter diesen i ein eindeutig bestimmtes i_o durch die Forderung

$$(1.17) \qquad \frac{t_{i_o}}{\gamma_{k_o i_o}} = \operatorname{Max}\left\{ \frac{t_i}{\gamma_{k_o i}} \mid i \notin \Delta, \gamma_{k_o i} < 0 \right\}$$

festlegen.

Ist Δ' für ein solches Paar (k_o, i_o) nach (1.10) gebildet, so gilt

$$(1.18) \qquad Q(x_{\Delta'}) > Q(x_\Delta) \quad \text{und} \quad \Delta' \in \vartheta_R$$

und (k_o, i_o) ist bei festgehaltenem k_o das einzige Paar, dessen Austausch eine Ecke $x_{\Delta'}$, für die (1.18) gilt, liefert.

Die verschiedenen möglichen Varianten des Simplexalgorithmus unterscheiden sich durch die Vorschrift, mit der im Fall (1.6c) der Index k_o unter den $k \in \Delta$ mit $\alpha_k < 0$ ausgewählt wird. Um diese Austauschvorschrift für unseren theoretischen Algorithmus herleiten zu können, gehen wir aus von der folgenden Charakterisierung der Schnittbedingung

(1.19) Es sei $\Delta \in \vartheta_R$ und x_Δ sei keine Optimalecke. Dann gilt die Schnittbedingung

$\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$(1.20) \quad \text{Min} \left\{ -\frac{\beta_k}{\alpha_k} \mid k \in \Delta,\ \alpha_k < 0 \right\}$$

$$\geq \text{Max} \left\{ -\frac{\beta_k}{\alpha_k} \mid k \in \Delta,\ \alpha_k > 0 \right\}$$

Zum Beweis wird nur benutzt, daß $\Sigma(\Delta)$ einen Strahl $\mathbb{R}^+ w$ mit

$$(1.21) \quad w = \lambda u + \mu v = \sum_{k \in \Delta} (\lambda \beta_k + \mu \alpha_k) a_k$$

genau dann schneidet, wenn

(1.22) $\lambda \beta_k + \mu \alpha_k \geq 0$ für alle $k \in \Delta$ und $w \neq 0$ gilt.

Da $\Sigma(\Delta)$ kein Optimalsimplex ist, kann dies nur für $\lambda \neq 0$ erfüllt sein. Beachtet man, daß $U^+ = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0\}$, so erkennt man, daß $\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$ genau dann gilt, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$(1.23) \quad \beta_k + \mu \alpha_k \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \Delta .$$

Wegen $\alpha_k \neq 0$ für $k \in \Delta$ ist dies aber genau der Fall, wenn (1.20) gilt.

Jetzt kann die angekündigte Auswahlvorschrift unseres theoretischen Algorithmus angegeben werden.

Lemma 1

Es sei $\Delta \in \vartheta_R$ und es liege der durch (1.9) charakterisierte Fall (1.6c) vor. Gilt dann die Schnittbedingung $\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$, so existiert höchstens ein benachbartes $\Sigma(\Delta')$ mit

(1.24) $\quad \Sigma(\Delta') \cap U^+ \neq \emptyset$, $Q(x_{\Delta'}) > Q(x_\Delta)$ und $\Delta' \in \vartheta_R$.

Ist $Q(x)$ auf X nach oben beschränkt, so existiert genau ein solches Δ'. Man erhält dieses Δ' nach (1.24), falls ein solches existiert, indem man $k_o \in \Delta$ so wählt, daß

$$(1.25) \quad \alpha_{k_o} < 0 \quad \text{und} \quad -\frac{\beta_{k_o}}{\alpha_{k_o}} = \operatorname{Min}\left\{\frac{-\beta_k}{\alpha_k} \mid k \in \Delta, \alpha_k < 0\right\} ,$$

indem man weiter i_o durch die Vorschrift (1.17) bestimmt und Δ' nach (1.10) bildet. Durch (1.25) ist k_o eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß k_o durch (1.25) eindeutig festgelegt ist. Wäre nämlich

$$-\frac{\beta_{k_o}}{\alpha_{k_o}} = -\frac{\beta_{k_1}}{\alpha_{k_1}} = \mu \ , \qquad \alpha_k, \beta_k \neq 0 \text{ wegen (II.1.5) für } k \in \Delta$$

so wäre

$$u + \mu v = \sum_{\substack{k \in \Delta \\ k \neq k_o, k_1}} (\beta_k + \mu \alpha_k)\, a_k$$

da $\beta_{k_o} + \mu \alpha_{k_o} = \beta_{k_1} + \mu \alpha_{k_1} = 0$

dh. die n Vektoren $v, u, (a_k)_{\substack{k \in \Delta \\ k \neq k_o, k_1}}$ wären linear abhängig im Widerspruch zur Voraussetzung (II.1.5).

Die Voraussetzung $\Sigma(\Delta) \cap U^+ \neq \emptyset$ sei erfüllt.

Wir setzen

$$(1.26) \qquad \mu = \text{Min} \left\{ -\frac{\beta_k}{\alpha_k} \middle| \; k \in \Delta \,,\; \alpha_k < 0 \right\} = -\frac{\beta_{k_o}}{\alpha_{k_o}}$$

Dann gilt also

$$(1.27) \qquad \beta_k + \mu\alpha_k \geqq 0 \quad \text{für } k \in \Delta \quad \text{und} \quad \beta_{k_o} + \mu\alpha_{k_o} = 0.$$

Aus (1.26) rechnet man nach, daß hieraus und aus (1.14-15)

$$(1.28) \qquad \beta'_{i_o} + \mu\,\alpha'_{i_o} = 0 \quad \text{und} \quad \beta'_k + \mu\,\alpha'_k \geqq 0 \text{ für } k \in \Delta'$$

folgt, dh. daß auch

$\Sigma(\Delta') \cap U^+ \neq \emptyset$ gilt. Aus (1.11-15) folgt weiter, daß

$$(1.29) \qquad \mu = \text{Max} \left\{ -\frac{\beta'_k}{\alpha'_k} \middle| \; k \in \Delta',\; \alpha'_k > 0 \right\} = -\frac{\beta'_{i_o}}{\alpha'_{i_o}}$$

Um zu beweisen,, daß die angebene Wahl von (k_o, i_o) die einzige ist, für die $\Sigma(\Delta') \cap U^+ \neq \emptyset$ und $\Delta' \in \mathfrak{B}_R$ und $Q(x_{\Delta'}) > Q(x_\Delta)$ gilt, gehen wir von einem benachbarten Δ' nach (1.24) aus, für das diese Bedingungen erfüllt sind. Definiert man dann μ durch (1.29), so folgt aufgrund der Formeln (1.11-15), daß dann auch umgekehrt (1.26) gilt, dh. daß k_o der durch (1.26) festgelegte

Index ist. Wegen $Q(x_{\Delta'}) > Q(x_{\Delta})$ ist i_o dann durch (1.17) bestimmt.

Bei der numerischen Realisierung sei vorausgesetzt, daß für das Startsimplex $\Sigma(\Delta^o)$, für das die Schnittbedingung $\Sigma(\Delta^o) \cap U^+ \neq \emptyset$ erfüllt ist, das aus den γ_{ik} , α_i , β_i , t_i , t bestehende Tableau bekannt sei oder durch die Auflösung entsprechender Gleichungssysteme bestimmt sei. Dann bestimmt man in jedem Simplexschritt die jeweiligen Indexpaare (i_o,k_o) nach (1.25),(1.17) und berechnet das neue Tableau nach den Formeln (1.11-15), bis das Verfahren abbricht, also keine benachbarte Ecke mehr existiert, die (1.24) erfüllen würde.

§2 Der Erwartungswert der Schrittzahlschranke im Falle n=3

Im Falle n=3 kann die Integraldarstellung (II.3.15) so vereinfacht werden, daß sie einer numerischen Auswertung zugänglich wird. Die Herleitung dieser vereinfachten Darstellung soll im folgenden skizziert werden.

Im Falle der Gaußverteilung liefert die Auswertung von $E_1(S_{m,3})$ nach (III.1.3-6) nach relativ einfachen Koordinatentransformationen

$$(2.1)\quad E_1(S_{m,3}) = \frac{1}{\pi^3}\, m(m-1)(m-2) \int_0^\infty G(h)^{m-3}\, e^{-3h^2}\, \bar{\Lambda}_S(h)\, dh$$

mit

$$(2.2)\quad \bar{\Lambda}_S(h) := \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(2y^2+x_1^2+x_2^2+z^2)}\, (x_1-x_2)^2\, |z-y|\, \varphi(\rho, x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 dy dz$$

und $\rho := \sqrt{h^2+y^2}$, wobei $\bar{\Lambda}_S(h)$ bis auf eine herausgezogene Konstante mit $\Lambda_S(h)$ übereinstimmt und wobei

$$(2.3)\quad \varphi(\rho, x_1, x_2) := \arccos\left(\frac{\rho^2 + x_1 x_2}{\sqrt{\rho^2+x_1^2}\sqrt{\rho^2+x_2^2}}\right)$$

Setzt man noch

$$(2.4)\quad \Phi_1(\rho) := \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (x_1-x_2)^2 \varphi(\rho, x_1, x_2)\, dx_1 dx_2\, e^{-2\rho^2}$$

$$(2.5)\quad \Phi_2(y) := \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} |z-y|\, dz$$

sc erhält man nach (2.4-6)

$$(2.6)\quad E_1(S_{m,3}) = \frac{1}{\pi^3} m(m-1)(m-2) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(h)^{m-n_e} - h^2 \Phi_1(\sqrt{h^2+y^2}) \Phi_2(y)\, dy\, dh$$

In Bild 1 sind die durch numerische Auswertung gewonnenen Werte $\frac{1}{2}E_1(S_{m,3})$ aufgetragen. Zum Vergleich zeigen die als × eingetragenen Werte jeweils die Mittelungen aus der Schrittzahl von 20 numerischen Experimenten. Hierbei wurde die zugrundeliegende Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Vektoren $a_1,\ldots,a_m,u,v \in \mathbb{R}^3$ durch einen geeigneten Zufallsgenerator simuliert. Um die durch u festgelegte Startecke des theoretischen Modells zu finden, wurde eine Optimierung in u-Richtung vorgeschaltet, deren Schrittzahl bei der Zählung nicht berücksichtigt wurde. In analoger Weise wurden alle weiteren numerischen Experimente mit den jeweils vorausgesetzten Verteilungen angepaßten Zufallsgeneratoren durchgeführt.

Analoge Darstellungen können für die Gleichverteilungen auf Ω_3 bzw. auf ω_3 hergeleitet werden.

Im Falle der Gleichverteilung auf ω_3 gelangt man zu der Darstellung

$$(2.7)\quad E_3(S_{m,3}) = m(m-1)(m-2)\frac{1}{8\pi^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_3(\psi)^{m-3} \sin^3\psi\ \Phi_2(\gamma) \arccos(1-2\sin^2\gamma\sin^2\psi)\, d\gamma\, d\psi$$

mit $\Phi_2(\gamma) = 2\sin\gamma\,(2\sin\gamma - 2\gamma\cos\gamma + \pi\cos\gamma)$

und $F_3(\psi) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\psi$.

Im Falle der Gleichverteilung auf Ω_3 ergibt sich .

$$(2.8)\quad E_2(S_{m,3}) = m(m-1)(m-2)\frac{27}{32\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\psi)^{m-3}\sin^9\psi\ \Phi_2(\gamma)\,\Phi_1\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\psi+\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}\right)d\psi d\gamma$$

mit

$$\Phi_1(\tau) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \arccos\left(\frac{\tau^2 + x_1x_2}{\sqrt{\tau^2+x_1^2}\sqrt{\tau^2+x_2^2}}\right)(x_1-x_2)^2dx_1dx_2$$

und mit

$$\Phi_2(\gamma) := \sin^5\gamma\ \left[\sin\gamma\left(1-\frac{1}{3}\sin^2\gamma\right) + \cos\gamma\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right]$$

sowie

$$F_2(\psi) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\psi + \frac{1}{4}\sin^2\psi\cos\psi$$

Die Bilder 1 und 2 zeigen Vergleiche der numerischen Auswertung von $\frac{1}{2}E_i(S_{m,3})$ $(i=1,3)$ mit den zugehörigen numerischen Experimenten.

Der entsprechende Vergleich für i=2 findet sich in (I.3) Bild 2.

Aus der Einführung der Größen s und S wird unmittelbar plausibel, daß

$$E_{\mathfrak{N}0}(s) \approx \frac{1}{2} E_{\mathfrak{N}0}(S). \tag{2.9}$$

Die sehr gute Übereinstimmung der experimentellen mittleren Schrittzahlwerte mit $\frac{1}{2} E_{\mathfrak{N}0}(S)$ bestätigt diese Hypothese. Es sei bemerkt, daß diese Hypothese in folgendem Sinne präzisiert werden kann:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E_{\mathfrak{N}0}(s_{m,n})}{E_{\mathfrak{N}0}(S_{m,n})} = \frac{1}{2} \tag{2.10}$$

wobei $s_{m,n}$ die Schrittzahl s im Stichprobenraum $\mathfrak{A}(m,n)$ bedeute. Auf den nicht sehr schwierigen Beweis von (2.10) soll aber hier verzichtet werden.

Bild 1

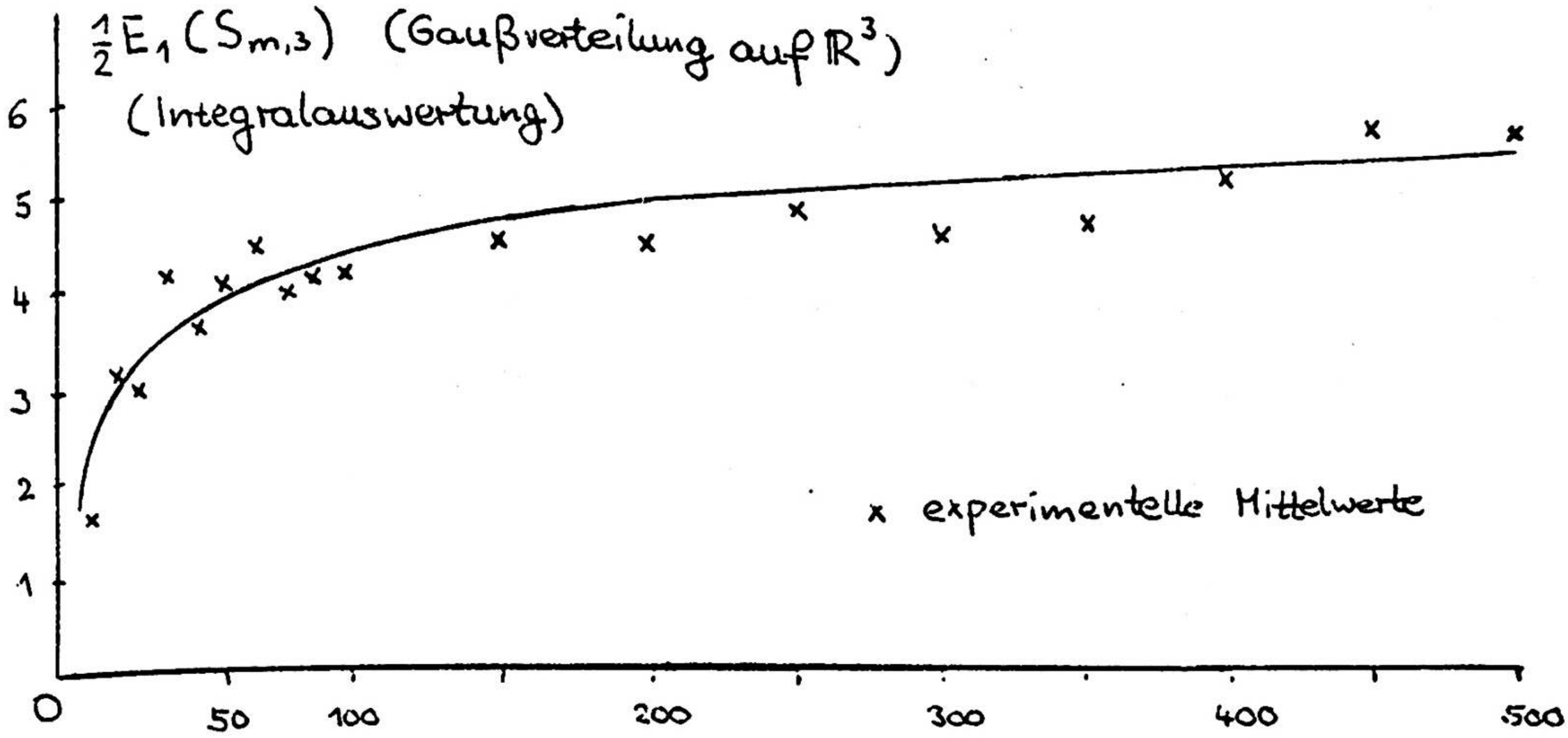
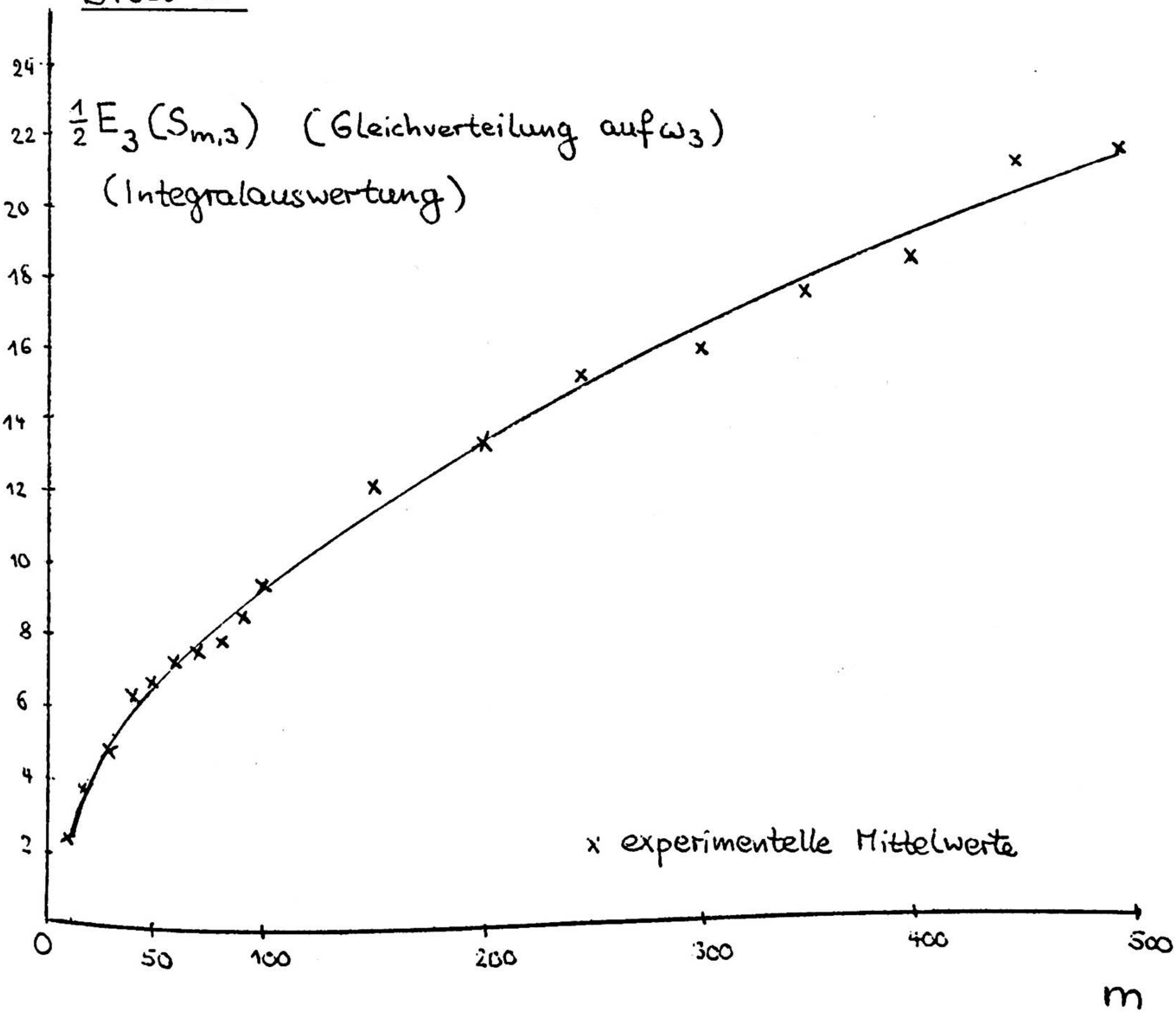

$\frac{1}{2}E_1(S_{m,3})$ (Gaußverteilung auf $\mathbb{R}^3$)
(Integralauswertung)
6
5
4
3
2
1
0
50
100
200
300
400
500
m
x experimentelle Mittelwerte

Bild 2


$\frac{1}{2}E_3(S_{m,3})$ (Gleichverteilung auf ω_3)
(Integralauswertung)
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
50
100
200
300
400
500
m
x experimentelle Mittelwerte

§3 Numerische Experimente für allgemeine n

In den Bildern 3 bis 10 werden die numerischen Experimente für weitere Kombinationen von m,n angegeben. Hierbei wird jeweils mit geeignet angepaßten Konstanten $\tilde{C}_i(n)$ jeder Kombination eine "halbtheoretische" Näherungsformel

$$E_i(S_{m,n}) \approx \tilde{C}_i(n)\,q(m,n) \tag{3.1}$$

zugeordnet.

Erwartungsgemäß zeigt sich die asymptotische Übereinstimmung in (3.1) jeweils erst für höhere m-Werte, wenn n anwächst. So sind z.B. die für n=10 angeführten Bilder so zu interpretieren, daß die Asymptotik erst bei hohem m zu guten Näherungen führt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß im Beweis von III Satz 2 auf den - an sich besonders einfachen - Fall n=2, der in diesem Beweis jedoch als Sonderfall behandelt werden muß, aus Platzgründen verzichtet wurde. Die entsprechenden Bilder zeigen aber in diesem Fall erwartungsgemäß eine besonders gute Übereinstimmung. Übrigens ist auch in diesem Fall eine numerische Integralauswertung der Integraldarstellung für $E_i(S_{m,n})$ möglich. Die Resultate für $E_1(S_{m,10})$ finden sich in (I.3) Bild 3.

Bild 3

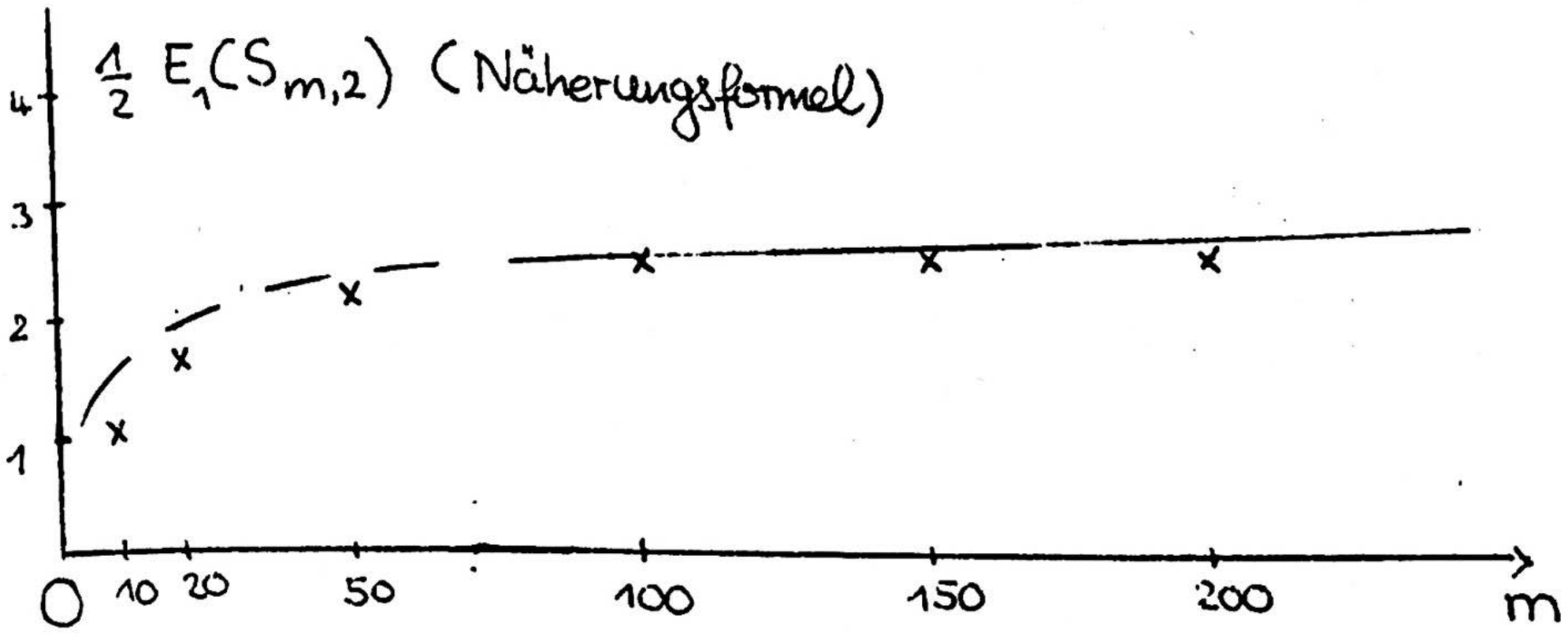


Bild 4

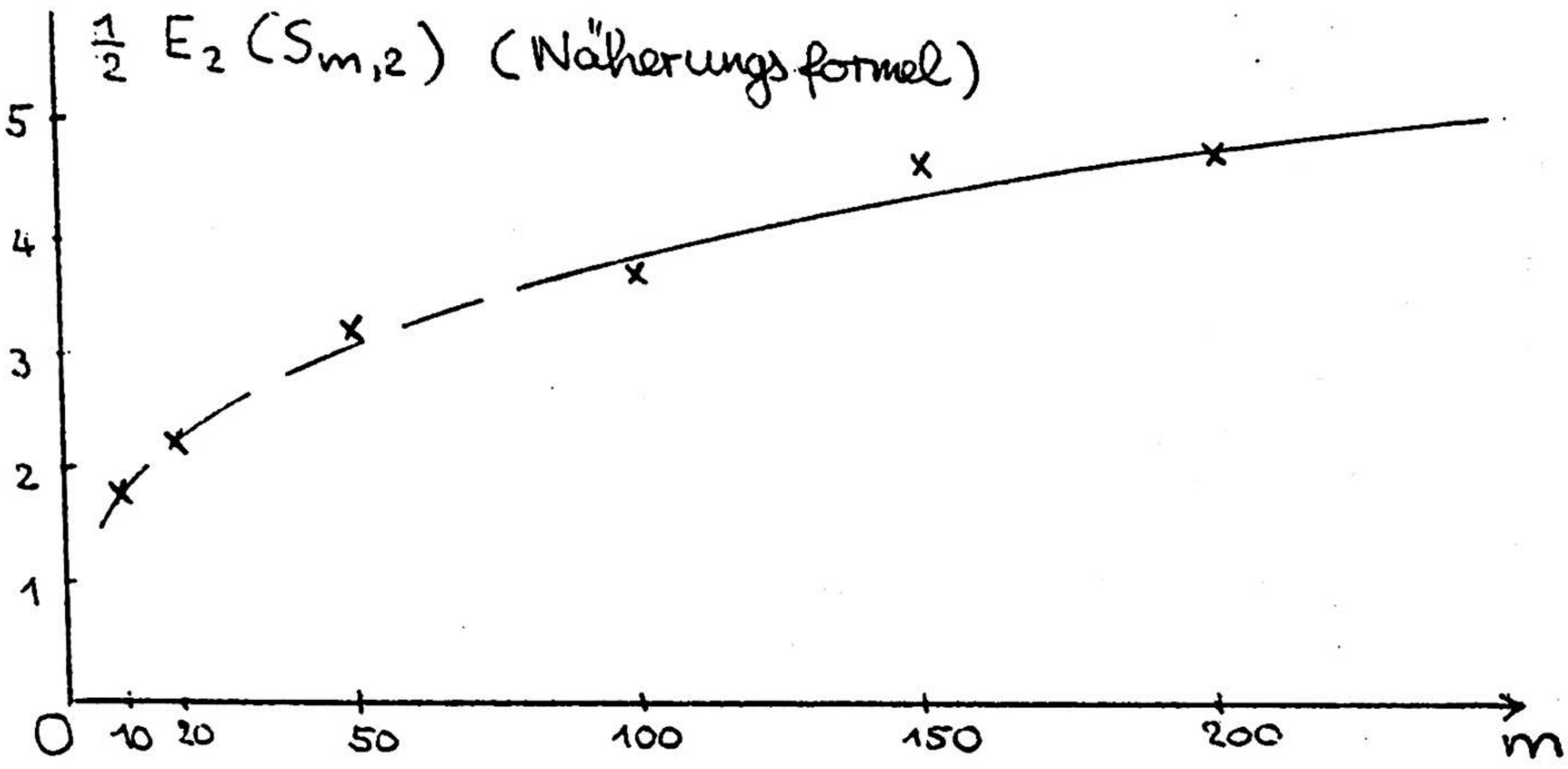


Bild 5

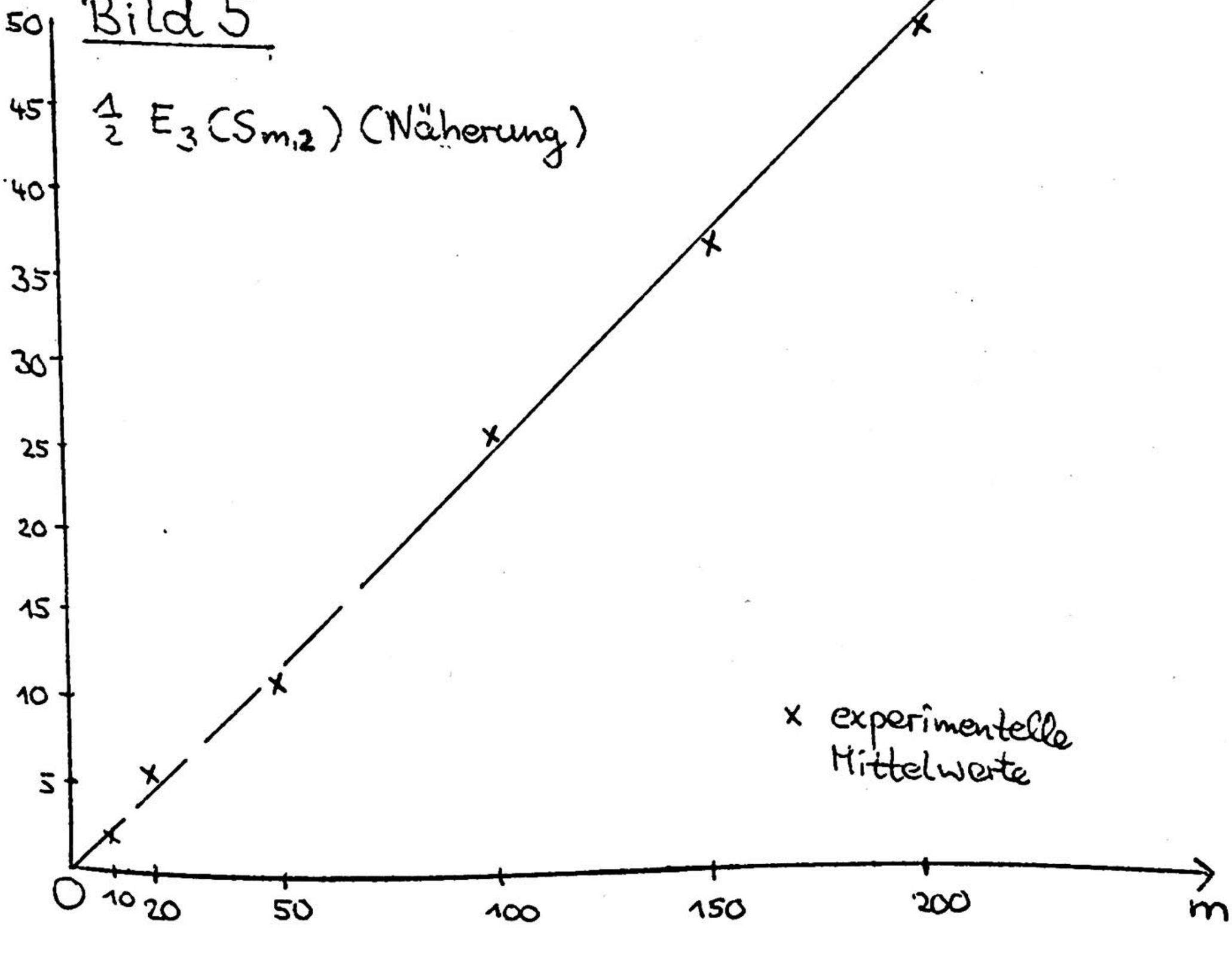


Bild 6

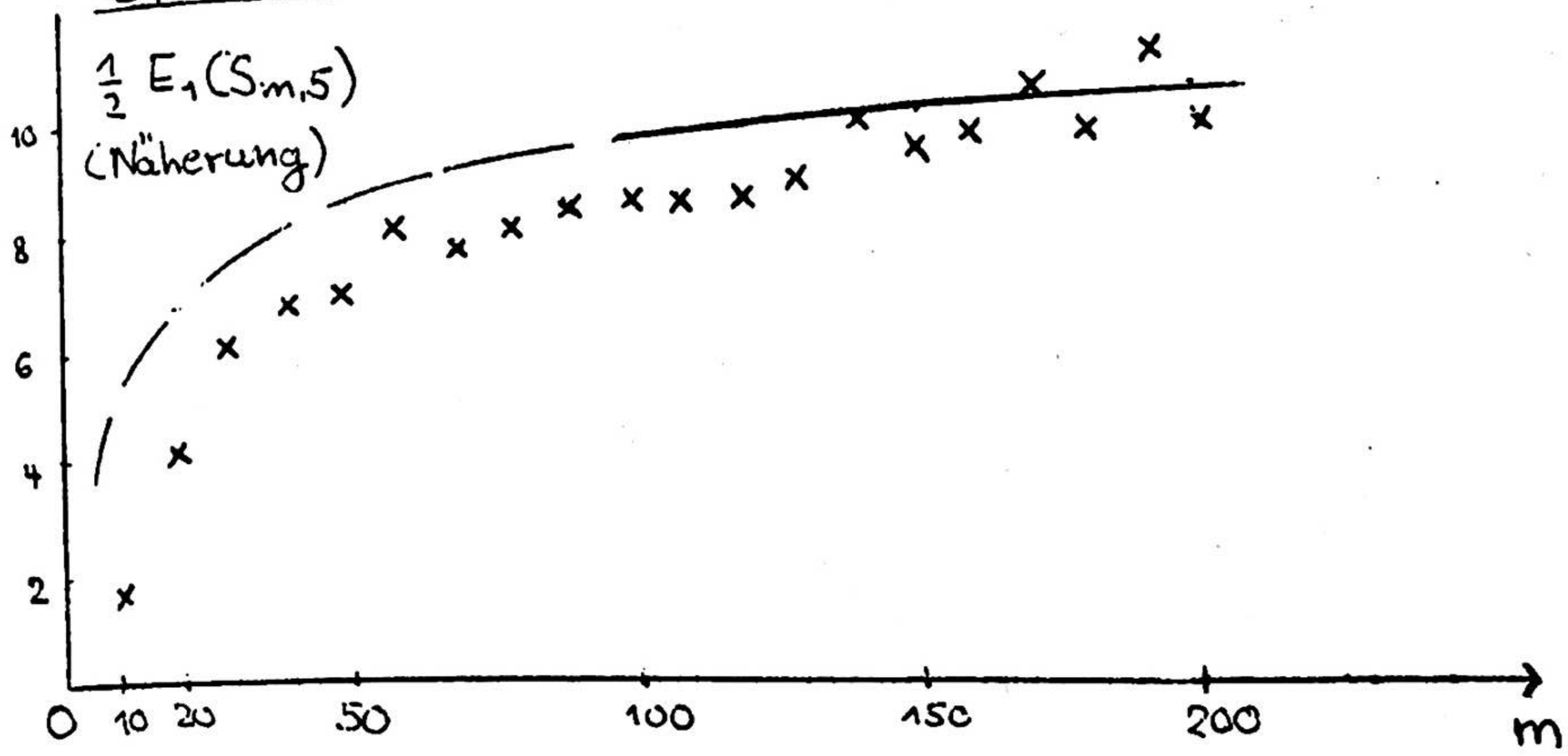


Bild 7

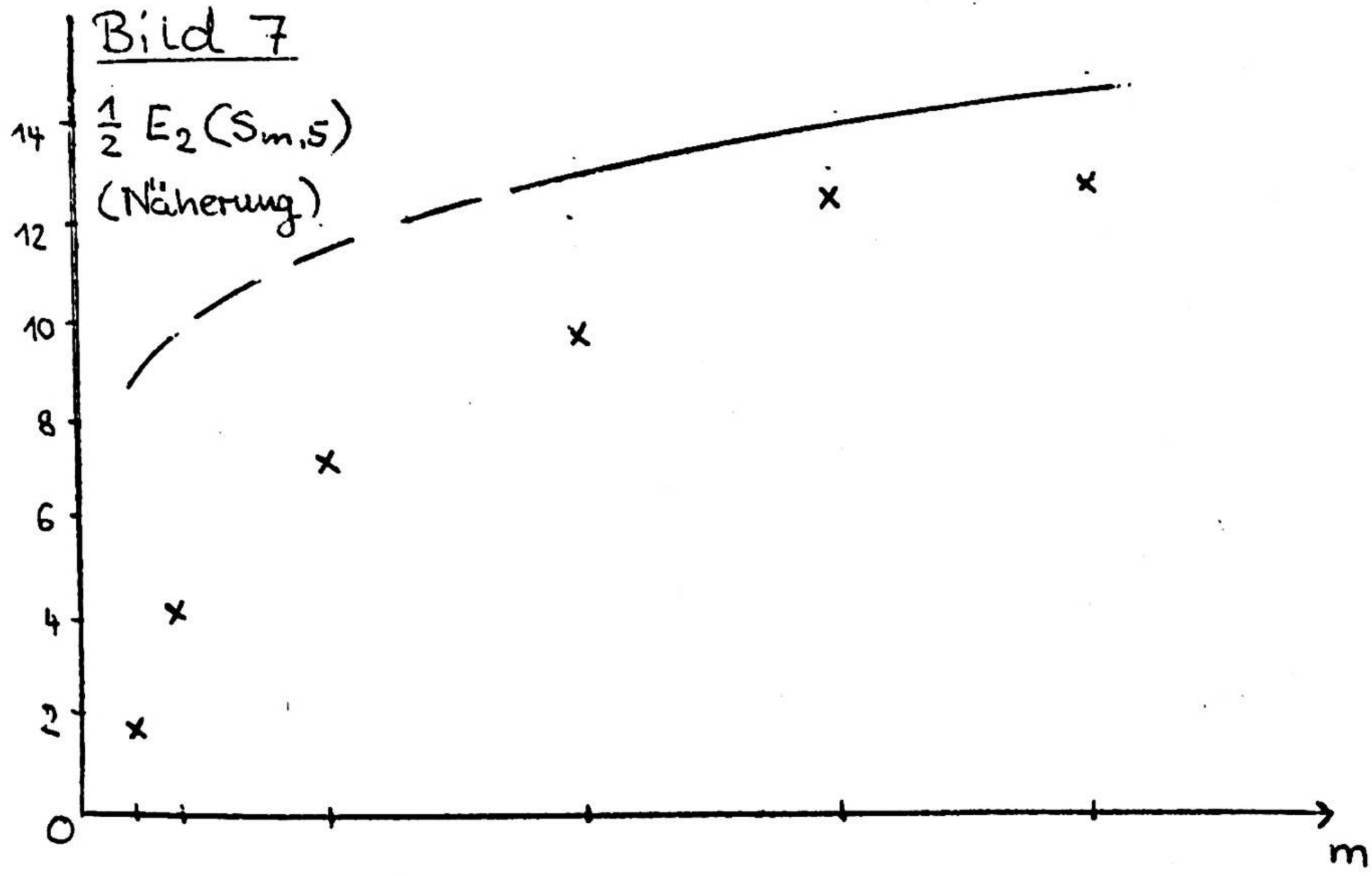


Bild 8

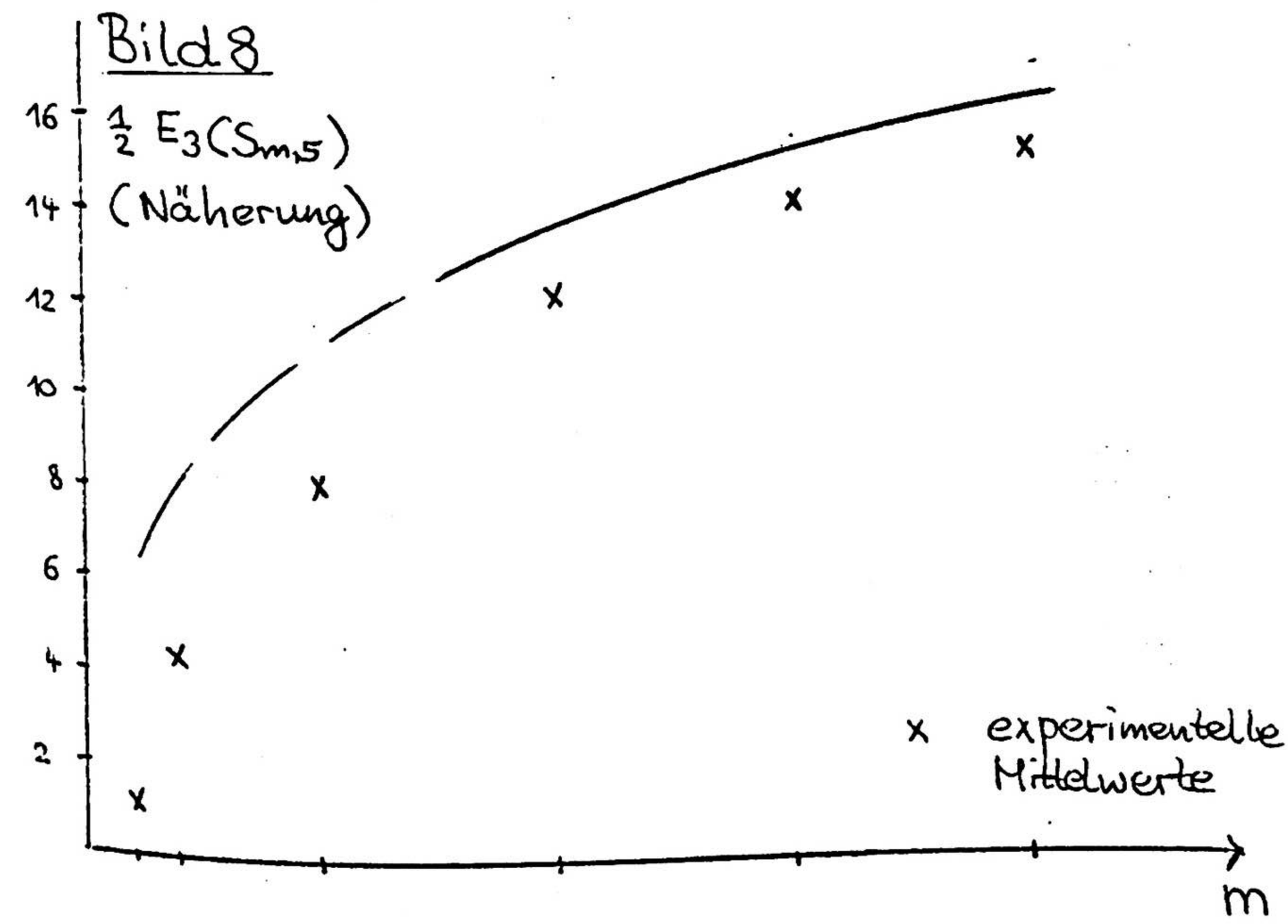


Bild 9

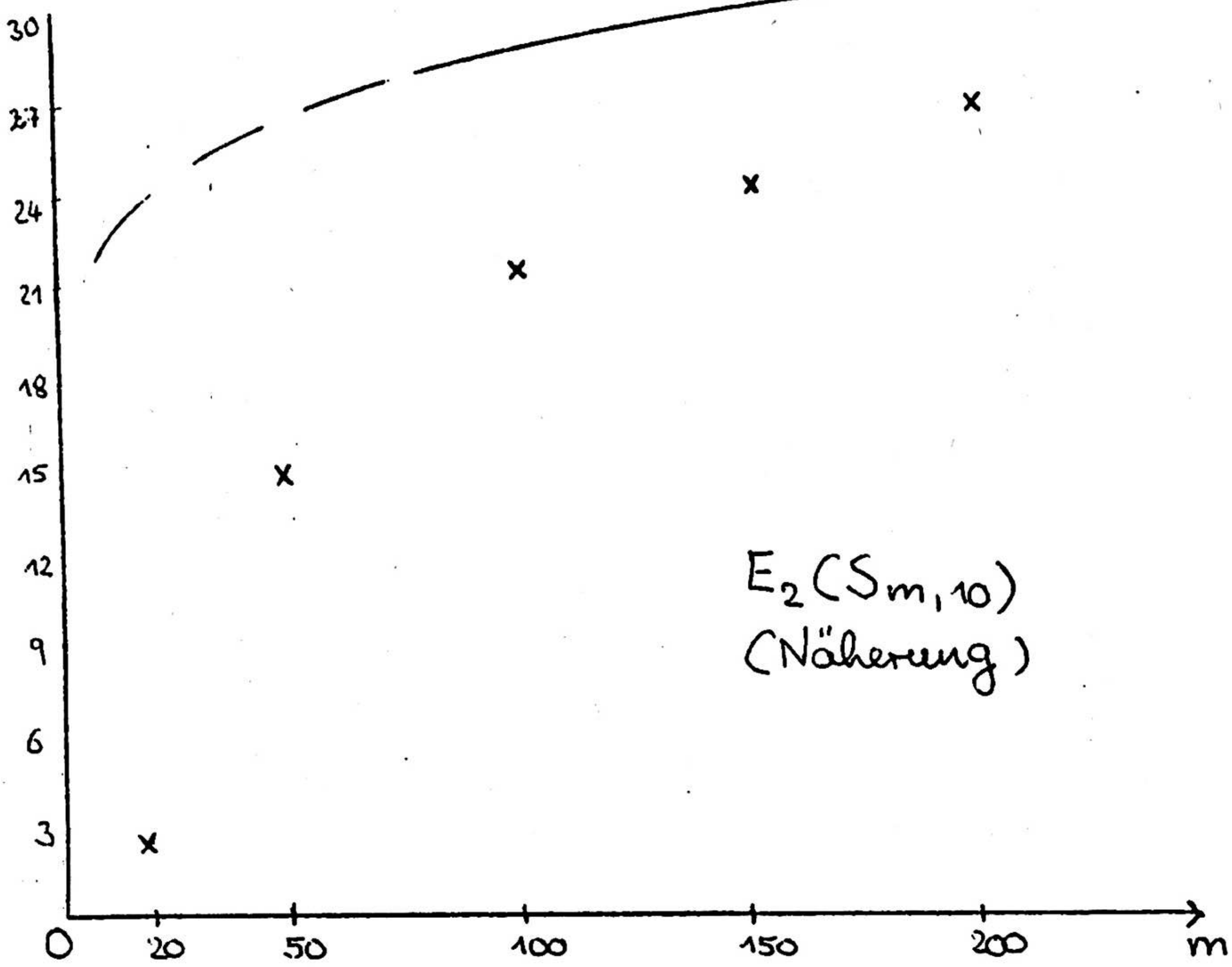
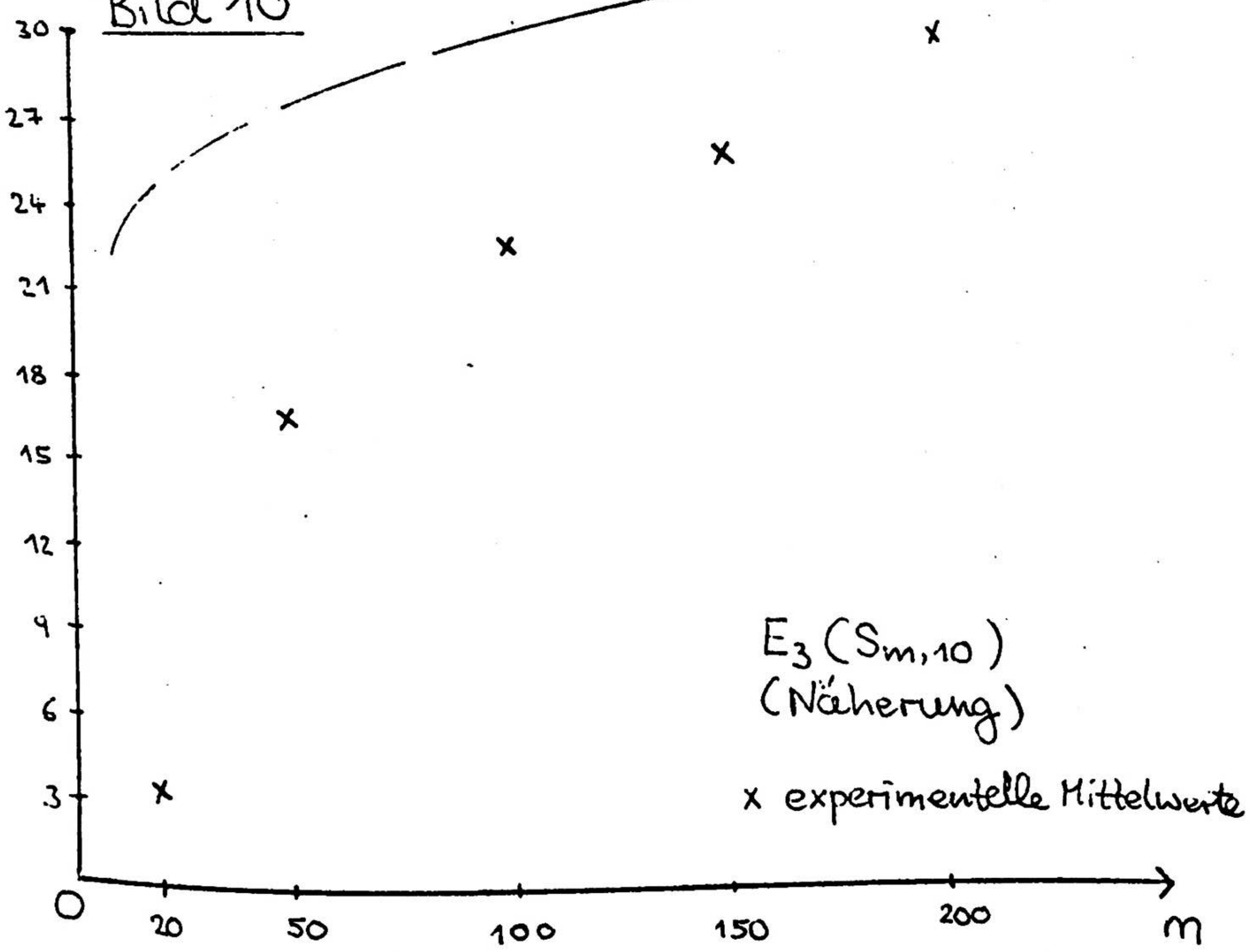


Bild 10



KAPITEL V (Anhang)

§1 Berechnung der Funktionaldeterminante

Zur Berechnung des in II.2 eingeführten Funktionaldeterminantenbetrags

$$J = \left| \frac{\partial(a_1^1, \ldots\ldots\ldots, a_n^n)}{\partial(b_1^1, b_1^2, \ldots, b_n^{n-1}, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, h)} \right|$$

gehen wir von der zugehörigen Funktionalmatrix $\mathfrak{J}$ aus, in deren $((j-1)n+i)$ter Zeile die Ableitungen von a_j^i stehen:

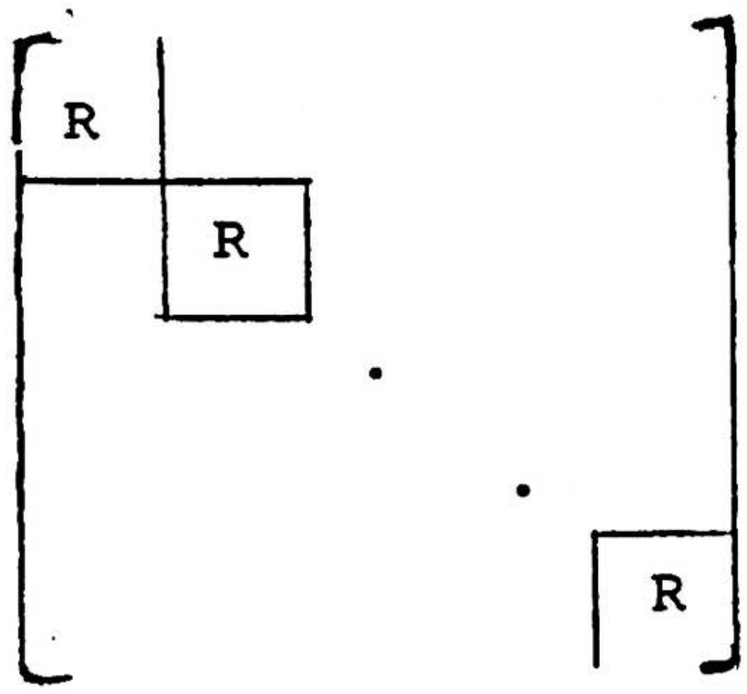
$$(1.1)\quad \left(\frac{\partial(a_j^i)}{\partial(b_1^1)}, \ldots, \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(b_1^{n-1})} \middle| \ldots \middle| \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(b_n^1)}, \ldots, \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(b_n^{n-1})} \middle| \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(\psi_1)} \cdots \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(\psi_{n-1})}, \frac{\partial(a_j^i)}{\partial(h)} \right)$$

Aufgrund der Einführung der neuen Variablen in (2.14) (Definition von $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$), (2.18), (2.19) in Kapitel II ergibt sich, daß $\mathfrak{J}$ in der Form

$$(1.2)\qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_2$$

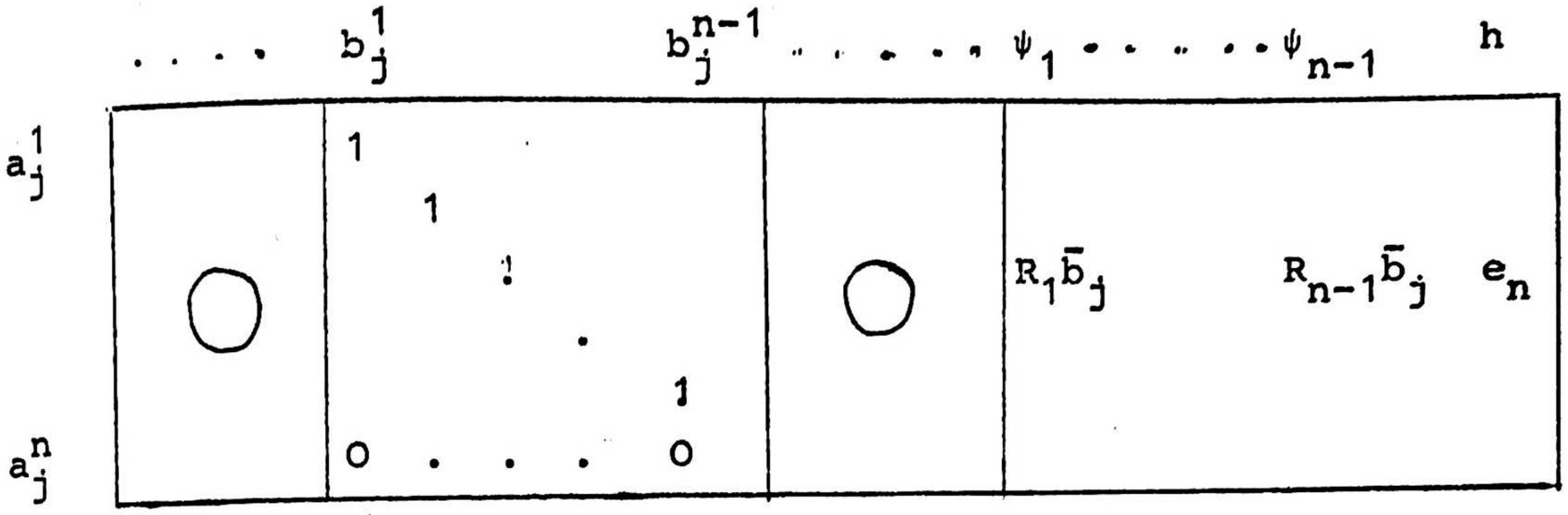
darstellbar ist, wobei $\mathfrak{J}_1$ die Blockdiagonalmatrix

(1.3)



und $\mathfrak{J}_2$ eine $(n^2 \times n^2)$-Matrix ist, deren "j-te Blockzeile"

(bestehend aus den Zeilen (j-1)n+j, j=1,..,n) die folgende Gestalt besitzt



wobei

$$(1.4) \qquad R_i := R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \psi_i} \qquad (i=1,\ldots,n-1)$$

und $\bar{b}_j$ in (II.2.19) definiert ist.

Dann gilt

$$(1.5) \qquad J = |\det \mathfrak{J}| = |\det \mathfrak{J}_1|\ |\det \mathfrak{J}_2| = |\det \mathfrak{J}_2|$$

da R eine orthogonale Matrix ist und daher $|\det \mathfrak{J}_1| = 1$.

Zur Bestimmung von $\det \mathfrak{J}_2$ überführen wir $\mathfrak{J}_2$ durch eine Zeilenpermutation in die Matrix $\mathfrak{J}_3$, indem die jeweils n-te Zeile der n "Blockzeilen" an das untere Ende der Gesamtmatrix verschoben werden.

$\mathfrak{J}_3$ hat dann die Blockgestalt

(1.6) $\mathfrak{J}_3 =$

$$\begin{bmatrix} E_{n-1} & & & \\ & E_{n-1} & & \\ & & & B \\ & & E_{n-1} & \\ & & & \tilde{B} \end{bmatrix}$$

wobei E_{n-1} die $((n-1)\times(n-1))$-Einheitsmatrix ist und die Elemente von $\tilde{B} := (\tilde{b}^i_j)$ die Darstellung

$$(1.7) \qquad \tilde{b}^i_j = e_n{}^T R_i \bar{b}_j = e_n{}^T R^T \frac{\partial R}{\partial \psi_i} \bar{b}_j = d_n{}^T \frac{\partial R}{\partial \psi_i} \bar{b}_j$$

für $i=1,\ldots,n-1$, $j=1,\ldots,n$ sowie

$$(1.8) \qquad \tilde{b}^n_j = 1 \qquad j=1,\ldots,n$$

besitzen.

Wegen $|\det \mathfrak{J}_2| = |\det \mathfrak{J}_3| = |\det \tilde{B}|$ gilt

$$(1.9) \qquad J = |\det \tilde{B}|.$$

Die Matrix R besteht aus den Spaltenvektoren $d_1,\ldots,d_n$, deren explizite Darstellung in den Formeln (II.2.16) angegeben ist. Berechnet man aus diesen Formeln die

Matrizen $\frac{\partial R}{\partial \psi_i}$ und geht damit in (1.7), so erhält man bei Beachtung der Orthogonalität der d_k, daß

$$\text{(1.10)} \qquad \tilde{b}^i_j = \sigma_i \, b^i_j \qquad (i=1,\ldots,n-1 \ , \ j=1,\ldots,n)$$

$$\tilde{b}^n_j = 1 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

mit

$$\sigma_i = -\sin\psi_{i+1} \sin\psi_{i+2} \cdots \sin\psi_{n-1} \qquad i=1,..,n-1.$$

Also gilt

$$\text{(1.11)} \qquad J = |\det \tilde{B}| = |\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}| \, |\det B|$$

$$= (\sin\psi_2)(\sin\psi_3)^2 \ldots\ldots (\sin\psi_{n-1})^{n-2} \, |\det B|$$

in Übereinstimmung mit Lemma 2 aus Kapitel II.

§2 Einige Abschätzungen

Bei den Beweisen von Kapitel III wurden mehrere Abschätzungen im Zusammenhang mit der Gammafunktion verwendet. Diese sollen hier bewiesen werden.

Bekannt sind folgende Identitäten (vgl. Courant [6])

$$(2.1) \qquad |\omega_n| = \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$(2.2) \qquad |\Omega_n| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = |\omega_n|\,\frac{1}{n}$$

Daraus folgen

$$(2.3) \qquad \frac{|\omega_n|}{|\omega_{n-1}|} = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad \text{und}$$

$$(2.4) \qquad \frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

Aus der Konvexität von $\ln(\Gamma(x))$ folgen die Einschließungen

$$(2.5) \qquad (x+\alpha-1)^{\alpha} \leq \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)} \leq x^{\alpha} \qquad \text{für } \alpha \in (0,1),\ x \geq 1$$

Damit lassen sich die Einschließungen (III.2.44) für die in (III.2.43) definierte Funktion E(k) nachweisen:

$$(2.6) \qquad \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \leq E(k) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{k-1}}$$

Wegen (III.2.46) gilt damit speziell

$$(2.7)\qquad \sqrt{\frac{2\pi}{n-1}} \leq \frac{|\omega_n|}{|\omega_{n-1}|} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n-2}} \qquad \text{und}$$

$$(2.8)\qquad \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq \frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

Außerdem folgt nun aus (2.2)

$$(2.9)\qquad \sqrt{\pi n} \leq \frac{|\omega_n|}{|\Omega_{n-1}|} \leq \sqrt{2\pi n}$$

wegen $2n \geq n+1$ für $n \geq 2$ und damit (III.2.31).

Im folgenden sollen noch einige Abschätzungen über Integrale der Art

$$(2.10)\qquad \int_0^1 (1-t)^k\, t^l\, dt = B(k+1,l+1)$$

hergeleitet werden.

Dabei machen wir Gebrauch von

$$(2.11)\qquad B(k+1,l+1) = \frac{\Gamma(k+1)\ \Gamma(l+1)}{\Gamma(k+l+2)}\ .$$

Wir beweisen zunächst die Aussage von (III.1.11)

$$(2.12)\qquad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1} \sqrt{\ln \frac{1}{t}}\, dt \leq \frac{1}{n} \sqrt{\ln \frac{m}{n-1}}$$

Es gilt (vgl. Gradsteyhn [14] S. 538 und 944)

$$(2.13)\qquad \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{l}\, \ln\left(\frac{1}{t}\right)\, dt \;=\; -\frac{\partial B(m-n+1,l+1)}{\partial l}$$

$$= B(m-n+1,l+1)\,\left[\psi(m-n+1)-\psi(l+1)\right]$$

mit $\psi(x) := \dfrac{\partial \ln \Gamma(x)}{\partial x}$ und weiter

$$(2.14)\qquad \psi(m-n+1)-\psi(n) \leqq \sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\nu} \leqq \ln\left(\frac{m}{n-1}\right).$$

Demnach gilt die Abschätzung

$$(2.15)\qquad \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1} \ln\frac{1}{t}\, dt \leqq B(m-n+1,n)\, \ln\left(\frac{m}{n-1}\right)$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich daraus

$$(2.16)\qquad \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1} \sqrt{\ln\frac{1}{t}}\, dt \leqq B(m-n+1,n) \sqrt{\ln\frac{m}{n-1}}$$

und daraus folgt (III.1.11).

Nun sollen die Aussagen (III.2.55-56) bewiesen werden.

Nach (III.2.55) gilt für $n \geqq 3$

$$(2.17)\qquad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}}\, dt \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n-2}\right)^{\frac{1}{n_i}}$$

Zum Beweis benutzen wir (2.11) und erhalten für die linke Seite den Ausdruck

$$(2.18) \qquad \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{n_i}\right)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m-\frac{1}{n_i}+1\right)\Gamma(n+1)} \quad .$$

Dieser läßt sich nach (2.5) nach oben abschätzen durch

$$(2.19) \qquad \frac{(m+1)^{\frac{1}{n_i}}}{n\,(n-1)^{\frac{1}{n_i}}} \quad .$$

Wegen $n \geq 3$ folgt hieraus mit $\frac{m+1}{n-1} \leq \frac{m}{n-2}$ die Aussage (2.17).

Es bleibt noch der Nachweis der Aussage (III.2.56).

Danach gilt

$$(2.20) \qquad \binom{m}{n} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{m-n}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}}\, (1-(\hat{\gamma}_i+1)\hat{E}(n_i)\,t^{\frac{2}{n_i}})\, dt$$

$$\geq \frac{1}{n}\, m^{\frac{1}{n_i}}\, (n-1)^{\frac{-1}{n_i}} (1-\varepsilon_i(m,n))$$

$$\text{mit } \lim_{m\to\infty} \varepsilon_i(m,n) = 0 \ .$$

Wir können die linke Seite nach unten abschätzen durch

$$(2.21) \quad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1-\frac{1}{n_i}} dt \ - \binom{m}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1-\frac{1}{n_i}} dt$$

$$- \binom{m}{n} \hat{E}(n_i)\,(\hat{\gamma}_i+1) \int_0^1 (1-t)^{m-n} t^{n-1+\frac{1}{n_i}}\, dt$$

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Wegen

$$(2.22)\qquad \binom{m}{n} \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}}\, dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{n_i}\right)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(m+1-\frac{1}{n_i}\right)} \geq \frac{1}{n}\left(\frac{m}{n-1}\right)^{\frac{1}{n_i}}$$

nach (2.5) und

$$(2.23)\qquad \binom{m}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1-\frac{1}{n_i}}\, dt \leq \frac{m^n}{n!}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}$$

sowie

$$(2.24)\qquad \binom{m}{n}\,(l_i+1) \int_0^1 (1-t)^{m-n}\, t^{n-1+\frac{1}{n_i}}\, dt\ \hat{E}(n_i)$$

$$\leq n(n+1)\frac{\Gamma(m+1)\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{n_i}\right)}{\Gamma\left(m+1+\frac{1}{n_i}\right)\,\Gamma(n+1)}\ \hat{E}(n_i)$$

$$\leq (n+1)\ \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{n_i}}\ \hat{E}(n_i)$$

ergibt sich, daß insgesamt (2.21) nach unten durch

$$(2.25)\qquad \frac{1}{n}\ \left(\frac{m}{n-1}\right)^{\frac{1}{n_i}}\ (1-\varepsilon_i(m,n))$$

abgeschätzt werden kann, mit

$$(2.26)\qquad \varepsilon_i(m,n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\ \frac{m^n}{(n-1)!}\ \left(\frac{n-1}{m}\right)^{\frac{1}{n_i}}$$

$$+\ n(n+1)\left((n-1)n\right)^{\frac{1}{n_i}}\ \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{n_i}}\hat{E}(n_i)$$

wobei $\lim\limits_{m\to\infty}\ \varepsilon_i(m,n) = 0$.

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, De Gruyter, Berlin (1974)

[2] Blaschke, W.: Vorlesungen über Integralgeometrie, Chelsea Publishing Company, New York (1949)

[3] Bronstein, I.: Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch Verlag, Zürich (1970)

[4] Carnal, H.: Die konvexe Hülle von n rotationssymmetrisch verteilten Punkten, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1963), S. 75-84

[5] Collatz, L., Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben, Springer Verlag, Berlin (1971)

[6] Courant, R.,: Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung 2, Springer Verlag, Berlin (1972)

[7] Dantzig, G.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Springer Verlag, Berlin (1966)

[8] Dinkelbach, W.: Sensitivitätsanalyse und parametrische Programmierung, Springer Verlag, Berlin (1969)

[9] Efron, B.: The Convex Hull of a Random Set of Points, Biometrika 52, Vol. 3 und 4, (1965), S. 331-343

[10] Erwe, F.: Differential-und Intergralrechnung 2, Bibliographisches Institut, Mannheim (1973)

[11] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1 und 2, Wiley, New York (1961)

[12] Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1973)

[13] Geffroy, J.: Localisation Asymptotique du Polyèdre d'Appui d'un Echantillon Laplacien à k Dimensions, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 10,3 (1961), S. 212-228

[14] Gradshteyn, I.S., Ryzlik, I.M.: Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York (1965)

[15] Grünbaum, B.: Convex Polytopes, Wiley, New York (1966)

[16] Jeroslow, R.G.: The Simplex Algorithm with the Pivot Rule of Maximizing Criterion Improvement, Discr. Math. 4 (1973), S. 367-377

[17] Klee, V., Minty, G.: How Good is the Simplex-Algorithm? Inequalities III, O. Shisha ed., (Academic Press New York 1971)

[18] Klee, V.: A Class of Linear Programming Problems Requiring a Large Number of Iterations, Num. Mathematik 7 (1965), S. 313-321

[19] Klee, V.: A Comparison of Primal and Dual Methods of Linear Programming, Num. Math. 9 (1966), S. 227-235

[20] Klee, V.: Paths on Polyhedra I, J. Soc. Indust. Appl. Math. 13 (1965), S. 946-956

[21] Klee, V.: Paths on Polyhedra II, Pacific J. of Math. 17, N. 2 (1966), S. 249-262

[22] Klee, V.: On the Number of Vertices of a Convex Polytope, Can. J. of Math. 16 (1964), S. 701-720

[23] Klee, V., Walkup, D.: The d-Step-Conjecture for Polyhedra of Dimension d<6, Acta Mathematica 117 (1967), S. 53-78

[24] Knuth, D.: The Art of Computer Programming, Vol. 1 und 2, Addison/Wesley, Reading (1969)

[25] Kreyszig, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen (1968)

[26] Krickeberg, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner Verlag, Stuttgart (1963)

[27] Liebling, T.: On the Number of Iterations of the Simplex Method, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Inst. für Operations Research, (1972)

[28] Mangasarian, O.: Nonlinear Programming, Mc Graw Hill, New York (1969)

[29] Nachbin, L.: The Haar Integral, P. van Nostrand, Princeton (1965)

[30] Natanson, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Harri Deutsch Verlag, Zürich (1975)

[31] Philip, J.: Plane Sections of Simplices, Math. Programming 3 (1972), S. 312-325

[32] Raynaud, H.: Sur le Comportement Asymptotique de l'Enveloppe Convexe d'un Nuage des Points Tirés au Hasard dans $\mathbb{R}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), S. 627-629

[33] Raynaud, H.: Sur l'Enveloppe Convexe des Nuage de Points Aleatoires dans $\mathbb{R}^n$, J. of Applied Probability 7 (1970), S. 35-48

[34] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1973)

[35] Renyi, A., Sulanke, R.: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten I, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1963), S. 75-84

[36] Renyi, A., Sulanke, R.: Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie 3 (1964), S. 138-147

[37] Renyi, A., Sulanke, R.: Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie 9 (1968), S. 146-157

[38] Ruben, H.: On the Moments of Order Statistics in Samples from Normal Populations, Biometrika 41 (1954), S. 200-227

[39] Santalo, L. A.: Introduction to Integral Geometry, Hermann Cie., Paris (1953)

[40] Schmidt, W. Some Results in Probabilistic Geometry, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie 9 (1968), S. 158-168

[41] Stoer, J., Witzgall, C.: Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer Verlag, Berlin (1970)

[42] Tucker, A.: Combinatorial Theory Underlying Linear Programs, in: R. Graves, P. Wolfe, Recent Advances in Mathematical Programming, Mc Graw Hill, New York (1963), S. 1-16

[43] Valentine, F. A.: Convex Sets, Mc Graw Hill, New York (1964)

[44] Vogel, W.: Lineares Optimieren, Akad. Verlagsges. Geest und Portig, Leipzig (1970)

[45] Werner, M.: Stochastische lineare Optimierungsmodelle, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt (1973)

[46] Weyl, H.: Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comment. Math. Helv. 7 (1935), S. 290-306

[47] Wolfe, P., Cutler, L.: Experiments in Linear Programming, in: R. Graves, P. Wolfe, Recent Advances in Mathematical Programming, Mc Graw Hill, New York (1963), S. 177-200

[48] Ziezold, H. Über die Eckenanzahl zufälliger konvexer Polygone, Dissertation, Heidelberg (1970)

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein modifizierter Simplexalgorithmus zur Lösung von linearen Programmen

$$\max_{x \in X} v^T x \qquad X = \{x \mid Ax \leq e\} \qquad v, x \in \mathbb{R}^n,$$
$$(1,..,1)^T = e \in \mathbb{R}^m, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

hergeleitet und auf seinen Rechenaufwand hin untersucht. Dabei wird eine Integraldarstellung für den Erwartungswert der Zahl von Iterationsschritten für die Phase II des Verfahrens angegeben. Der zugrunde gelegte Wahrscheinlichkeitsraum wird bestimmt durch die Verteilungen der Zeilenvektoren a_i (i=1,...,m) von A, die unabhängig, rotationssymmetrisch und identisch verteilt sein sollen.

Für drei spezielle Verteilungen werden asymptotische Abschätzungen für diesen Erwartungswert hergeleitet. Dabei ergibt sich für die Größenordnung dieses Erwartungswertes bei festem n und bei $m \to \infty$

$O(\sqrt{\ln m})$ bei Gaußverteilung der a_i

$O(m^{\frac{1}{n+1}})$ bei Gleichverteilung auf der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$

$O(m^{\frac{1}{n-1}})$ bei Gleichverteilung auf der Oberfläche der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$

Diese theoretischen Resultate werden verglichen mit umfangreichen numerischen Experimenten.

Lebenslauf

Karl-Heinz Borgwardt

geboren	am 8.4.1949 in Landstuhl (Pfalz) als Sohn des Diplom-Ingenieurs Hans-Joachim Borgwardt und seiner Ehefrau Hilde, geb. Munzinger
Schulen	1956-1960 Goetheschule Kaiserslautern 1960-1968 Staatliches Gymnasium am Rittersberg, Kaiserslautern
Abitur	Juni 1968
Studium	der Mathematik und der Wirtschafts-wissenschaften an der Universität des Saarlandes vom Wintersemester 1968/69 bis zum Wintersemester 1972/73
Studienabschluß	Diplom in Mathematik im Januar 1973
Beruf	seit April 1973 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathe-matik der Universität Kaiserslautern
Verlobt	mit Doris Herzog aus Kaiserslautern

